



Quelques aspects de la dispersion ultrasonore

Claude Gazanhes, J.P. Herault, J Kurkdji, J Sageloli

► To cite this version:

Claude Gazanhes, J.P. Herault, J Kurkdji, J Sageloli. Quelques aspects de la dispersion ultrasonore. [Rapport de recherche] Publications du LMA, numéro 146, LMA. 1997, 121 p. hal-01365731

HAL Id: hal-01365731

<https://hal.science/hal-01365731>

Submitted on 13 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

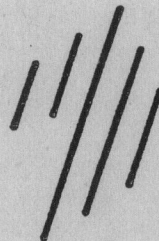
22473

ISSN 1159-0947
ISBN 2-909669-10-6

PUBLICATIONS DU L.M.A.

N° 146 (mai 1997)

NOTES SCIENTIFIQUES



QUELQUES ASPECTS DE LA DISPERSION
ULTRASONORE

Claude GAZANHES

avec la collaboration de

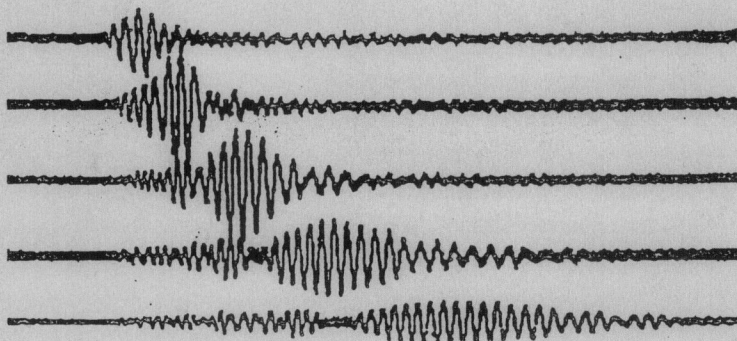
J.-P. HERAULT, J. KURKDJIAN, J. SAGÉLOLI

INIST - CNRS
ARRIVEE

20 JUIN 1997

DIRECTION APPROVISIONNEMENTS

(A)
(S)



3 5400 00650243 0

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



6159294

Figure de couverture :

Séparation des modes de propagation dans un guide acoustique
par filtrage spatial .

ISSN 1159-0947
ISBN 2-909669-10-6

PUBLICATIONS DU L.M.A.

N° 146 (mai 1997)

NOTES SCIENTIFIQUES



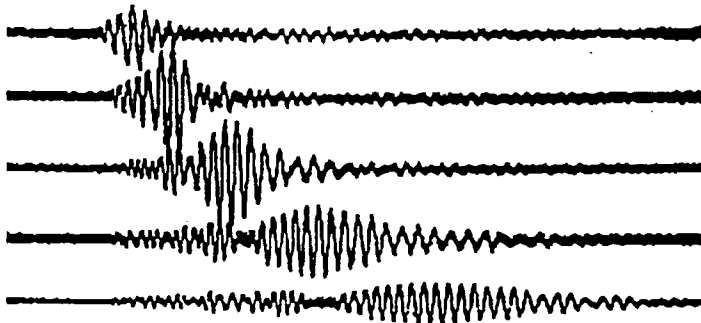
***QUELQUES ASPECTS DE LA DISPERSION
ULTRASONORE***

Claude GAZANHES

avec la collaboration de

J.-P. HERAULT, J. KURKDI, J. SAGELOLI

A120
NEC
20F



CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



G 159294

AVANT - PROPOS.

Le lecteur trouvera dans ce recueil un certain nombre de problèmes liés à la propagation des ondes acoustiques en milieu dispersif, milieu dans lequel la vitesse de propagation n'est plus une constante, mais dépend de la fréquence. L'équation des ondes doit être remplacée par un système d'équations plus compliquées qui font intervenir des modèles décrivant les mécanismes physiques qui réagissent sur les ondes et en modifient leur vitesse de propagation. On observe qu'un paquet d'ondes se déforme au cours de la propagation.

Dans le cas de la propagation guidée, la dispersion est due à des interférences d'origine géométrique, engendrées par les réflexions successives sur les parois du guide d'ondes. C'est en étudiant la propagation d'un phénomène de battements, (interférences entre deux ondes monochromatiques de fréquences voisines) que Lord Rayleigh a introduit les définitions importantes de célérités de phase et de groupe. La dispersion géométrique ou normale fait l'objet du premier chapitre; la propagation d'une onde acoustique par petits fonds marins illustrera ce type de dispersion.

Dans le chapitre 2 nous abordons l'étude de la propagation en milieu absorbant. Ce milieu est dispersif, absorption et célérité de phase étant reliées par les équations de Kramers-Krönig. La dispersion est d'origine intrinsèque, elle ne dépend que des propriétés physiques du milieu, on l'appelle dispersion anormale, ou inverse. Les milieux présentant des phénomènes de relaxation en donnent un bon exemple.

Dans le cas où l'absorption est importante la célérité de groupe perd toute signification. C'est en étudiant la propagation d'une onde électromagnétique dans un diélectrique considéré comme composé de particules électriques (électrons) excitées sous l'influence d'un champ électromagnétique, que L. Brillouin introduisit la notion de vitesse de transport de l'énergie. Chaque particule constitue un système résonnant. La propagation acoustique en milieux diphasiques eau - bulles de gaz, est un bon modèle de ce type de dispersion de résonance. Il sera traité dans le chapitre 3.

Par ailleurs on observe la dispersion de couplage dès que l'on associe deux systèmes par l'intermédiaire de forces de liaison; on obtient dans ces conditions deux équations de propagation couplées.

La nature de la dispersion dépend du type de couplage. On distingue les couplages par la force et ceux par la vitesse et par l'accélération.

Le couplage par la force est réalisé dans les milieux stratifiés; le couplage par la vitesse et par l'accélération est réalisé dans les milieux poreux. Ils seront décrits au chapitre 4.

Nous terminerons, au chapitre 5, par l'étude de la propagation en milieux périodiques. Les milieux périodiques ont suscité de nombreux travaux, en particulier ceux de L. Brillouin au sujet des vibrations des réseaux cristallins, du mouvement d'un électron dans un potentiel périodique, de la diffraction de la lumière par les ultrasons, etc. Nous appellerons "dispersion paramétrique" la dispersion attachée à de tels milieux car elle dépend d'un paramètre, à savoir la périodicité de leurs structures.

Table des matières

Chapitre 1. La dispersion géométrique ou normale.	5
1. Introduction.	5
2. Analyse des phénomènes liés à la dispersion géométrique.	5
3. Ondes guidées et dispersion géométrique.	21
Chapitre 2. La dispersion anormale ou inverse.	39
1. Introduction.	39
2. Les relations de dispersion de Kramers - Krönig.	41
3. La relaxation acoustique.	44
4. Théorie phénoménologique de la relaxation.	47
5. Un exemple de relaxation: la dispersion dans un produit bitumineux.	52
Chapitre 3. La dispersion de résonance.	59
1. Introduction.	59
2. Vitesse de transport de l'énergie.	60
3. Propagation en milieu diphase et dispersion de résonance.	63
4. Analyse de la dispersion.	68
Chapitre 4. Dispersion de couplage.	74
1. Introduction.	74
2. Dispersion dans un composite stratifié.	75
3. Dispersion dans un milieu poreux.	83
4. Ondes guidées et couplage de modes.	90
Chapitre 5. La dispersion paramétrique.	103
1. Introduction.	103
2. Ondes dans un milieu périodique indéfini.	104
3. Les réseaux périodiques d'oscillateurs.	110
4. Dispersion acoustique de vitesse dans des structures périodiques.	115

CHAPITRE 1

LA DISPERSION GÉOMÉTRIQUE OU NORMALE.

1. Introduction.

La dispersion géométrique, ou encore normale ne fait pas intervenir l'absorption du milieu de propagation, elle ne dépend que de la géométrie du milieu et la propagation dans les guides d'ondes en est l'exemple classique. Cette propagation, qui est dispersive, s'établit par réflexions successives sur les parois du guide. Ces réflexions provoquent des interférences entre les différentes ondes réfléchies de sorte que seules les ondes en phase, vérifiant une condition d'interférences constructives, se propagent. Cette condition, appelée équation de dispersion, n'est satisfaite que pour une suite discrète de solutions appelées modes de propagation.

Dans de nombreux cas les modes possèdent une fréquence de coupure au - dessous de laquelle ils ne peuvent pas se propager. Pour une fréquence donnée, le champ acoustique reçu en un point du milieu est la somme de tous les modes possibles excités. Les applications de ce type de propagation sont nombreuses, outre les guides d'ondes en électromagnétisme, elle est caractéristique en acoustique sous-marine de la propagation par petits fonds marins. Elle intervient également dans le contrôle des plaques métalliques, des matériaux composites en contrôle non destructif des matériaux par ultrasons.

Nous analyserons tout d'abord les phénomènes généraux liés à la dispersion géométrique puis, après un rappel rapide des conditions de propagation dans un guide d'ondes à faces parallèles, nous exposerons un cas concret: la propagation d'un train d'ondes par petits fonds marins.

2. Analyse des phénomènes liés à la dispersion géométrique.

2.1. La dispersion au sens de Rayleigh.

2.1.1. Propagation d'un phénomène de battements.

Considérons la propagation simultanée, suivant une même direction de propagation Ox , de deux ondes de même amplitude, de pulsations voisines

$\omega + \Delta \omega$ et $\omega - \Delta \omega$, de nombres d'onde $k + \Delta k$ et $k - \Delta k$. Superposons ces deux ondes:

$$\Phi = \cos [(k + \Delta k) x - (\omega + \Delta \omega) t] + \cos [(k - \Delta k) x - (\omega - \Delta \omega) t], \quad (1)$$

dont la somme

$$\Phi = 2 \cos (kx - \omega t) \cos (x \Delta k - t \Delta \omega), \quad (2)$$

représente un phénomène de battements défini par une onde modulée en amplitude autour de la pulsation ω . L'onde porteuse correspond au facteur

$$\cos (kx - \omega t),$$

et son amplitude est modulée par le facteur

$$2 \cos (x \Delta k - t \Delta \omega),$$

lentement variable.

La fig. 1 représente cette situation.

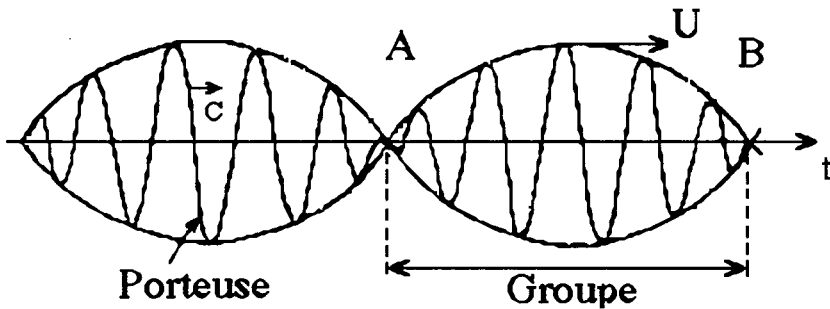


Fig. 1

On dit que l'ensemble des ondes comprises entre les deux minima A et B forme un groupe ou un train d'ondes.

2.1.2. Célérité de phase, célérité de groupe.

La porteuse se déplace à l'intérieur de l'enveloppe à la célérité de phase définie par le rapport.

$$c = \frac{\omega}{k} . \quad (3)$$

La modulation quant à elle se propage avec la célérité $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$.

A la limite, lorsque les deux fréquences tendent vers la même valeur, cette expression peut être représentée par

$$U = \frac{\partial\omega}{\partial k} , \quad (4)$$

appelée célérité de groupe.

On peut exprimer la célérité de groupe en fonction de la célérité de phase ou de la longueur d'onde. En fonction de la célérité de phase, avec $\omega = kc$ il vient:

$$U = \frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk} . \quad (5)$$

Cette définition est due à Lord Rayleigh [1].

Remarquons au passage qu'en l'absence de dispersion, c est constant, et donc la célérité de groupe est égale à la célérité de phase.

En fonction de la longueur d'onde avec $k = 2\pi / \lambda$ il vient:

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} . \quad (6)$$

On peut aussi écrire sous une autre forme,

$$\frac{1}{U} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \frac{dc}{d\omega} . \quad (7)$$

2.1.3. Interprétation géométrique.

La fonction de dispersion (3) est susceptible d'une interprétation géométrique simple. Traçons ω en fonction de k (fig. 2), la célérité de groupe correspondant au point $P(k, \omega)$ n'est autre que la pente $\frac{d\omega}{dk}$ de la tangente au point P de la courbe de dispersion.

La célérité de phase est donnée par la pente ω/k de la droite joignant l'origine O au point P.

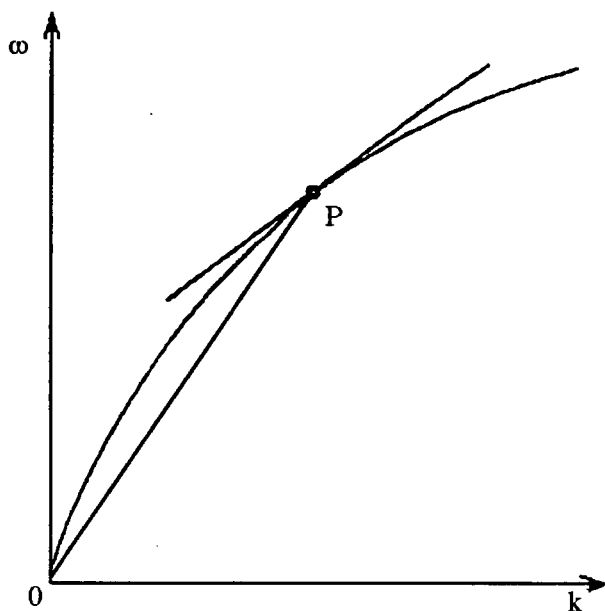


Fig. 2.

S'il n'y a pas de dispersion, la courbe se réduit à une droite de pente c .

2.2. Paquets d'ondes, groupes d'ondes, fronts.

La célérité de groupe au sens de Rayleigh caractérise la propagation de battements qui se succèdent les uns aux autres de façon régulière et sans déformation. Ces battements résultent de la superposition d'ondes élémentaires dont les fréquences se situent dans un très petit intervalle qui tend vers zéro. Dans le cas de signaux réels, limités dans le temps comme des trains d'ondes, il n'en est pas de même car dans ce cas le spectre de Fourier s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ dans le domaine des fréquences. Pour définir la célérité de groupe il n'est donc plus possible d'effectuer le passage à la limite consistant à faire tendre $\Delta\omega$ vers zéro. Une nouvelle définition de la célérité de groupe est nécessaire.

2.2.1. Paquets d'ondes, groupes d'ondes.

Considérons un paquet d'ondes défini par une série infinie de termes centrés autour d'une longueur d'onde donnée et représentons le signal par la relation intégrale:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk. \quad (8)$$

En général $A(k)$ est une fonction complexe, qui peut s'écrire:

$$A(k) = a(k) e^{i\theta(k)},$$

où $a(k)$ et $\theta(k)$ sont des fonctions réelles.

En posant $\Theta(k, x, t) = \theta(k) + kx - \omega(k)t$, la relation (8) devient:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{i\Theta(k,x,t)} dk.$$

La fonction $\Theta(k, x, t)$ est appelée la phase de l'intégrande de (8). Notons que x et t restent constants, durant l'intégration, alors que k est la variable.

Le milieu étant dispersif, k et donc Θ varient et, si $a(k)$ reste sensiblement constant les oscillations de l'intégrande s'annulent les unes par rapport aux autres dans l'intégration, sauf au voisinage des valeurs stationnaires de la phase pour lesquelles

$$\Theta(k, x, t) = \theta(k) + kx - \omega(k)t = \text{cte},$$

c'est - à - dire

$$\frac{d\Theta}{dk} = x_0 + x - \frac{d\omega}{dk} t = 0. \quad (9)$$

Soit encore

$$x_0 + x - U(k)t = 0,$$

après avoir posé

$$x_0 = -\frac{d\theta}{dk} \quad \text{et} \quad U = \frac{d\omega}{dk}.$$

L'équation $x = x_0 + U(k)t$ suggère qu'une "perturbation" débutant à l'instant $t = 0$, en un point x_0 , se propage suivant la direction x à la célérité de groupe U . Cette perturbation caractérisée par le nombre d'onde k est appelée groupe d'ondes ou paquet d'ondes; x_0 est appelée l'origine du groupe et U la célérité de groupe.

2.2.2. Fronts.

Dans un plan (x, t) l'équation $x = x_0 + U(k) t$ représente une famille de droites appelées "rayons", [2] chacun de ces rayons de pente $U(k)$ est caractérisé par une valeur particulière de k , et coupe l'axe des x en $x_0(k)$.

La figure 3a montre une telle famille de "rayons".

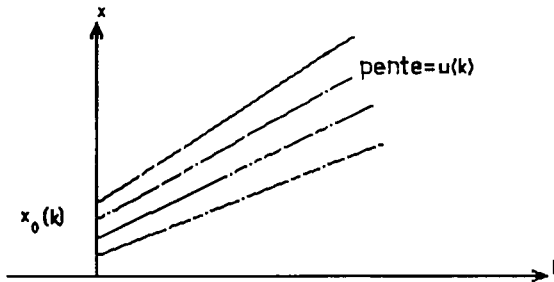


Fig. 3a

$A(k)$ Complexe
Une seule solution
pour k

♦ Si $A(k)$ est réel, $\theta(k)$ est nul, et les "rayons" passent tous par l'origine (fig 3b). On dit que l'on a affaire à des "ondes centrées".

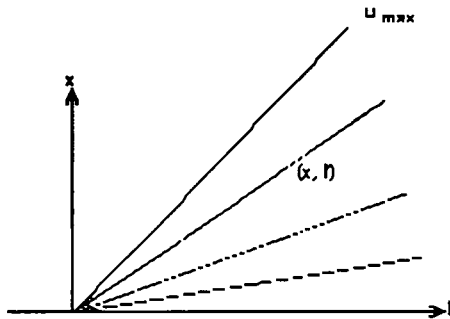


Fig. 3b

$A(k)$ réel
Une seule solution
pour k .

Dans ce cas la célérité de groupe est donnée par

$$U(k) = x / t.$$

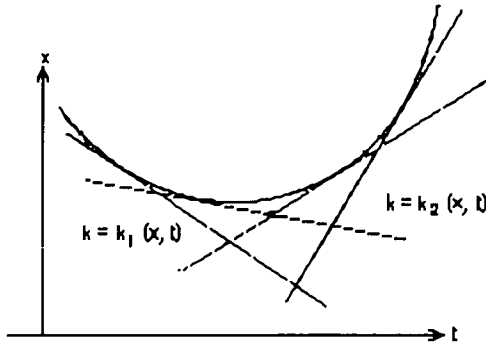
C'est une fonction du point d'observation et du temps. Dans la suite nous nous placerons toujours dans cette hypothèse.

♦ Il existe des cas où la célérité de groupe possède un maximum, ou un minimum, il existe alors des régions du plan (x, t) où il n'y a pas de rayon. Le rayon correspondant à la plus grande, ou à la plus petite célérité de groupe est appelé front avant ou front arrière. Sur le front la célérité de groupe est

constante, mais puisqu'elle passe par un extremum en fonction de k , il en résulte que

$$\partial U / \partial k = 0 .$$

- ♦ Il peut arriver que plusieurs rayons passent par le même point (x, t) .



Deux solutions
pour k

Fig. 3c

Comme on le voit sur la fig.3c les familles de rayons qui ne sont pas centrés possèdent une enveloppe qui limite une région dans laquelle il n'y a pas de perturbation. L'enveloppe s'obtient en éliminant k entre les équations $x = x_0 + U(k) t$ et $\partial x / \partial k = 0$, ce qui entraîne $\partial U / \partial k = 0$, à condition que x_0 soit constant l'enveloppe définit un front sur lequel la célérité de groupe n'est plus constante. Au point où deux rayons se coupent, il y a interférence entre deux groupes d'ondes.

Exposons maintenant la méthode de la phase stationnaire qui permet de calculer l'intégrale (8) décrivant l'évolution temporelle du signal.

2.3. Méthode de la phase stationnaire.

C'est Lord Kelvin [3] qui, en 1887, a proposé cette méthode à propos de l'étude des houles à la surface de la mer. Cette méthode utilise le fait que le spectre de nombre d'onde $A(k)$ est une fonction lentement variable par rapport aux oscillations de l'intégrande qui s'annule dans l'intégration, sauf au voisinage des valeurs stationnaires de la phase pour lesquelles la condition:

$$\frac{d}{dk} [k x - \omega(k) t] = x - t U = 0 \text{ est réalisée.}$$

L'intégrale (8) est de la forme générale:

$$I = \int_a^b \Phi(z) e^{if(z)} dz. \quad (10)$$

Soit z_0 la valeur de z qui rend $f(z)$ stationnaire. Posons $z = z_0 + \varepsilon$ avec $f'(z_0) = 0$ et développons $f(z)$ en série de Taylor, au voisinage de z_0 , il vient:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 f''(z_0) - \frac{1}{6} \varepsilon^3 f'''(z_0) + \dots \quad (11)$$

Plaçons - nous dans le cas des ondes centrées pour lesquelles $x_0 = 0$

et soient k_0 et ω_0 les valeurs qui vérifient la condition (9) alors

$$f(k_0) = k_0 x - \omega_0 t.$$

Le développement (11) s'écrit [4]:

$$\begin{aligned} kx - \omega t &= k_0 x - \omega_0 t - \frac{1}{2} (k - k_0)^2 t \frac{dU_0}{dk_0} \\ &- \frac{1}{6} (k - k_0)^3 t \frac{d^2 U_0}{dk_0^2} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Portons dans (8), il vient,

$$\Phi(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{A(k_0)}{2\pi} \int_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} e^{-\frac{1}{2} i(k - k_0)^2 t} \frac{dU_0}{dk_0} dk. \quad (13)$$

$$\text{Posons } \frac{1}{2} t (k - k_0)^2 \left| \frac{dU_0}{dk_0} \right| = \frac{\pi \sigma^2}{2}.$$

Puisque la valeur de l'intégrale (13) est négligeable pour les valeurs de k différant beaucoup de k_0 , nous pouvons étendre les bornes d'intégration de $\pm \infty$ de sorte que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm \frac{i\pi \sigma^2}{2}} d\sigma = \sqrt{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}},$$

est une intégrale de Fresnel.

L'intégrale (13) a alors pour valeur,

$$\Phi(x, t) = \frac{|A(k_0)|}{\sqrt{2\pi t \left| \frac{dU_0}{dk_0} \right|}} e^{i\left(k_0 x - \omega_0 t \pm \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (14)$$

Le signe + correspond à $\frac{dU_0}{dk_0} < 0$, et le signe - à $\frac{dU_0}{dk_0} > 0$.

Les valeurs de k_0 et ω_0 sont calculées à partir de (9),

$$x - t U(k) = 0,$$

elles dépendent à la fois du point d'observation x et du temps t . En ce point le signal que l'on observe est modulé en fréquence, il peut avoir la forme



Fig.3.

donnée par la fig. 3.

2.4. Fronts et vitesse de front.

Le signal synthétique de la fig. 3 a été calculé à partir de la formule 14 dans l'hypothèse où le signal émis est un train d'ondes de quatre périodes à fréquence fixe f_0 , la célérité de phase décroît quand la fréquence augmente, alors que la célérité de groupe augmente. Le signal reçu se compose de groupes d'ondes dont le groupe principal est situé autour de la fréquence f_0 du signal émis, et de groupes secondaires appelés "précurseurs" de fréquences élevées qui précèdent le signal. Ces précurseurs appelés fronts de deuxième espèce [2] correspondent à des nombres d'onde élevés et seront étudiés plus loin.

Examinons maintenant ce qui se passe au voisinage d'un front dit de première espèce [2] sur lequel, nous l'avons vu au paragraphe 2.2.1, nous avons $\partial U / \partial k = 0$.

2.4.1. Fronts de première espèce à vitesse constante.

Sur le front de première espèce la célérité de groupe passe par un extremum, en conséquence $\partial U / \partial k = 0$ et la formule (14) qui donne une

amplitude infinie n'a plus de sens. Il faut alors conserver le terme du troisième ordre dans le développement (12), pour calculer l'amplitude.

$$\text{Soit : } f(z) = f(z_A) + \varepsilon f'(z_A) - \frac{1}{6} \varepsilon^3 f'''(z_A) + \dots \quad (15)$$

avec cette fois: $\varepsilon = k - k_A$

k_A étant la valeur pour laquelle

$$\frac{dU}{dk_A} = 0.$$

Il vient alors:

$$kx - \omega t = k_A x - \omega_A t + (k - k_A)(x - t U_A) - \frac{1}{6} (k - k_A)^3 \frac{d^2 U_A}{dk_A^2} + \dots \quad (16)$$

On évalue l'intégrale (8) pour les valeurs de la pulsation voisine de ω_A .

Il vient:

$$\Phi(x, t) = \frac{A(k_A)}{2\pi} e^{i(k_A x - \omega_A t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a\varepsilon - b\varepsilon^3)} d\varepsilon. \quad (17)$$

$$\text{En posant } a = x - t U_A \text{ et } b = -\frac{1}{6} t \frac{d^2 U_A}{dk_A^2},$$

l'intégrale

$$E(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(a\varepsilon - b\varepsilon^3)} d\varepsilon,$$

est une intégrale d'Airy et (17) prend la forme:

$$\Phi(x, t) = A(k_A) \cos(k_A x - \omega_A t) \frac{2\pi}{3|2b|^{1/3}} E(V), \quad (18)$$

où l'on a posé

$$V = 2(3)^{1/3} \left| \frac{a}{b} \right|^{1/3},$$

et

$$E(V) = V^{\frac{1}{3}} \left[J_{\frac{1}{3}}(V) + J_{-\frac{1}{3}}(V) \right] \quad \text{si } (ab > 0),$$

$$E(V) = V^{\frac{1}{3}} \left[I_{\frac{1}{3}}(V) - I_{-\frac{1}{3}}(V) \right] \quad \text{si } (ab < 0).$$

Le signal $\Phi(x,t)$ donné par (18) se compose d'un paquet d'ondes ayant un maximum prononcé autour de la pulsation ω_A qui définit la fréquence d'Airy. L'amplitude de ce paquet d'ondes décroît comme $E(V)$ (fig.4).

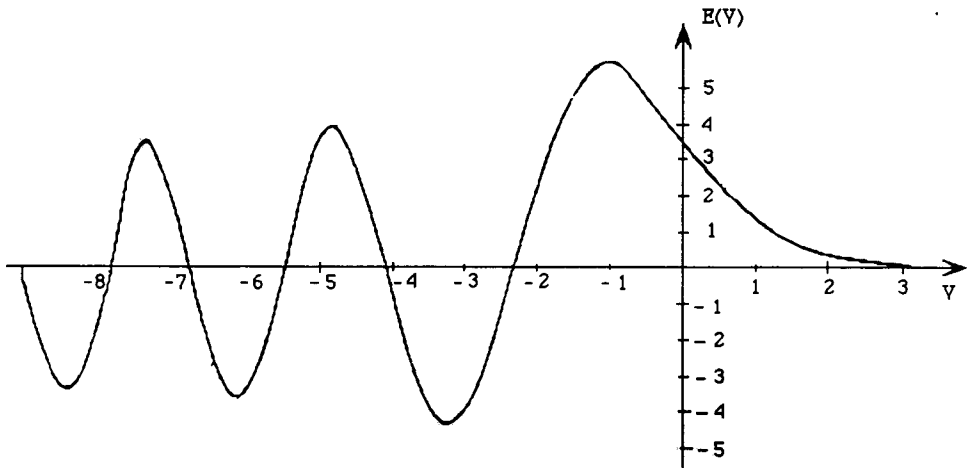


Fig.4.

Illustrons ce résultat par un exemple et considérons le modèle de Pekeris [4] de la propagation sous-marine par petits fonds. Dans ce modèle la célérité de groupe passe par un minimum pour une pulsation donnée, notée ω_A , (fig.5). Observons le signal reçu en un point quelconque situé à la distance x d'une source émettant à large bande. La fréquence reçue la première, à l'instant $t_1 = \frac{x}{c_2}$ correspond à la pulsation de coupure ω_c . La valeur de cette fréquence augmente avec le temps jusqu'à l'instant $t_2 = \frac{x}{c_1}$ pour lequel $U = c_1$ où il apparaît une deuxième fréquence très élevée qui se superpose à ω_B . Les deux fréquences tendent l'une vers l'autre pour se

rejoindre en ω_A , au temps $t_3 = \frac{x}{U_m}$ correspondant au minimum de U , (fig.5).

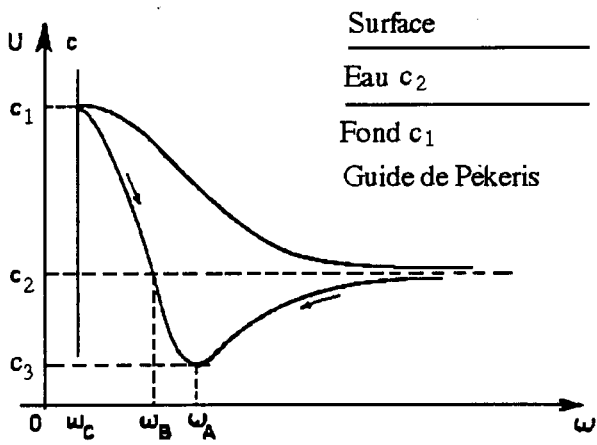


Fig.5.

La séquence d'Airy commence donc par le battement des deux fréquences l'une ω_B , l'autre très supérieure à ω_B .

L'amplitude du signal augmente et passe par un maximum pour la fréquence ω_A qui rend la célérité de groupe minimale. C'est l'instant d'arrivée t_3 du front de première espèce. Ensuite l'amplitude du signal décroît rapidement (fig.6). Autour de ω_A l'enveloppe du signal est donnée par la fonction $E(V)$ représentée sur la fig.4.

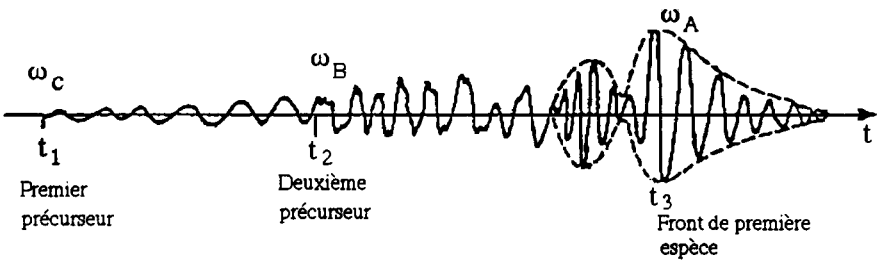


Fig.6.

L'instant d'arrivée t_2 des fréquences élevées correspond à un front de deuxième espèce.

2.4.2. Fronts de deuxième espèce à vitesse constante.

Ces fronts correspondent aux "précurseurs" à fréquences élevées, donc à des nombres d'onde élevés, de sorte qu'il n'est plus possible de développer l'exposant $kx - \omega t = k(x - Vt)$ de l'intégrale (8) en série de Taylor. Par contre il est possible d'aborder le problème autrement à condition que le spectre de nombre d'onde $A(k)$ et la célérité $U(k)$ soient développables en séries de la forme:

$$A(k) = \frac{A_1}{k} + \frac{A_2}{k^2} + \dots,$$

et

$$kV = k c_0 + \frac{A_1}{k} + \frac{A_2}{k^2} + \dots,$$

où c_0 est une constante finie.

Dans ces conditions la relation (8) s'écrit:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k) e^{ik(x - c_0 t)} dk,$$

avec
$$B(k) = A(k) e^{-i \left(\frac{A_1}{k} + \frac{A_2}{k^2} + \dots \right)}.$$

Le premier précurseur de fréquence élevée se propage avec une vitesse constante c_0 , la célérité de groupe tend vers cette même constante c_0 qui dans notre exemple est la célérité de phase dans le milieu homogène infini. C'est la vitesse de front, on dit avec C. Eckart [2] que l'on a affaire à un front de deuxième espèce à vitesse constante.

La vitesse de front perd sa signification pour un signal à spectre borné tel que:

$$|A(f)| = 0 \text{ pour } |f| > f_m.$$

Dans ce cas, le signal ne peut pas avoir de front car il n'est jamais nul sur un intervalle s'étendant à $-\infty$. La notion d'arrivée du front dépend d'un seuil (niveau de bruit) et de la sensibilité des capteurs.

2.5. Vitesse de signal.

Le problème nous semble clairement posé par G. Bonnet [5] lorsqu'il écrit: "*La métrologie d'une célérité de groupe ou de la grandeur associée, la vitesse de signal, est liée essentiellement à la définition d'un "repère" de position associé à l'onde progressive*".

Et nous en avons rencontré deux grandes familles: la méthode du paquet d'ondes et la méthode du front .

Dans la méthode du paquet d'ondes, le choix du maximum comme repère de position présente un inconvénient majeur puisque par nature, le paquet d'ondes utilisé possède un spectre étroit, les relations d'incertitude rendent son maximum difficilement localisable.

Dans la méthode du front la présence des précurseurs qui se superposent entre eux et au signal principal perturbe la forme du front, en fait il faudrait être capable de connaître celle-ci pour chaque type de signal utilisé. En outre le recours à un critère de seuil pour déterminer le repère de position oblige chacun à choisir arbitrairement ses critères de repérage. Ces inconvénients ont conduit J. Ville [6], H. M. Bradford [7], et G. Bonnet [5], à choisir *"un critère absent de toute hypothèse préalable sur la forme du signal d'émission, ou sur l'étendue de son spectre"*. Ce critère repose sur un procédé de moyenne déterminant une sorte de barycentre attaché au signal. Malgré les déformations de celui-ci en cours de propagation, on montre que le barycentre adopté se déplace à une vitesse constante, en l'absence d'absorption, et quelle que soit la complexité du signal.

2.5.1. Vitesse de signal et célérité de groupe.

On définit la position moyenne du signal par l'expression:

$$\bar{x}(t) = \frac{\int s(t, x) x s(t, x) dx}{\int s(t, x) s(t, x) dx} \quad (19)$$

Le signal étant réel $|s|^2 = s^2$. $|s|^2$ est choisit comme facteur de pondération plutôt que s car $|s|^2$ est réel et positif. En outre $|s|^2$ est la densité d'énergie associée au signal.

Dans le plan de Fourier on obtient le spectre en nombre d'onde $S(k, t)$ du signal tel que,

$$s(x, t) \longleftrightarrow S(k, t)$$

$$x s(x, t) \longleftrightarrow -\frac{1}{i} \frac{dS(k, t)}{dk}$$

d'où par l'égalité de Parseval:

$$\bar{x} = -\frac{1}{i} \frac{\int S^*(k, t) \frac{dS(k, t)}{dk} dk}{\int S^*(k, t) S(k, t) dk} \quad (20)$$

Le numérateur est égal à l'énergie totale du signal émis, constante puisqu'il n'y a pas d'absorption. Calculons la vitesse du signal:

$$S(k,t) = A(k) e^{-i\omega t},$$

avec

$$\frac{dS}{dk} = \left[\frac{dA(k)}{dk} - it A(k) \frac{d\omega}{dk} \right] e^{-i\omega t}.$$

Portons dans (20), il vient:

$$\bar{x} = -\frac{1}{i} \frac{\int A^* \frac{dA}{dk} dk}{|A|^2} + t \frac{\int A^* A \frac{d\omega}{dk} dk}{|A|^2},$$

soit encore

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + V_s t.$$

On constate que le centre du signal est doté d'un mouvement uniforme de vitesse

$$V_s = \frac{\int A^* A \frac{d\omega}{dk} dk}{|A|^2}, \quad (21)$$

\bar{x}_0 est la position du centre du signal à la date origine $t = 0$.

Comme $\frac{d\omega}{dk} = U$ est la célérité de groupe, la vitesse de signal n'est autre que la moyenne pondérée des célérités de groupe des différentes fréquences, le facteur de pondération $|A|^2$ étant proportionnel à l'énergie du signal:

$$V_s = \frac{\int A^* U A dk}{|A|^2} \quad (22)$$

2.5.2. Signaux à bande étroite.

Admettons la possibilité de développer la célérité de groupe en série de Mac - Laurin autour d'une valeur arbitraire k_0 .

$$U(k) = U(k_0) + U'(k_0) (k - k_0) + \frac{1}{2} U''(k_0) (k - k_0)^2 + \dots \quad (23)$$

Portons dans (22), on obtient la vitesse de signal:

$$\begin{aligned} V_s = & U(k_0) + U'(k_0) \int \frac{A^*(k - k_0) A dk}{|A|^2} + \\ & + \frac{1}{2} U''(k_0) \int \frac{A^*(k - k_0)^2 A dk}{|A|^2} + \dots, \end{aligned} \quad (24)$$

qui fait intervenir les moments [5] de la densité spectrale,

$$S(k) = \frac{|A(k)|^2}{|A|^2},$$

centrée sur k_0 .

Au premier ordre,

$$\int \frac{A^*(k - k_0) A dk}{|A|^2} = K - k_0,$$

où K est un nombre d'onde central. K étant arbitraire nous choisissons $k_0 = K$ de façon à centrer la densité $S(k)$.

Au second ordre,

$$\int \frac{A^*(k - k_0)^2 A dk}{|A|^2} = B^2$$

est le carré de la largeur spectrale. Il en résulte l'expression de la vitesse de signal au second ordre

$$V_s = U(k_0) + \frac{B^2}{2} U''(k_0) + \dots \quad (25)$$

♦ Si le signal est à bande extrêmement étroite c'est-à-dire si $B \rightarrow 0$, la vitesse de signal est égale à la célérité de groupe pour la fréquence centrale. Cette valeur ne dépend que de la dispersion du milieu. Nous sommes dans les hypothèses de Rayleigh.

♦ Si le signal est à bande étroite la vitesse de signal est donnée par (25), elle diffère au second ordre de la célérité de groupe, et elle dépend de la dispersion du milieu et des caractéristiques du signal, fréquence centrale et

largeur de bande. Dans la bande du signal, on peut approcher la courbe de dispersion par sa tangente.

♦ Dans le cas général la vitesse de signal est donnée par la relation (22). La vitesse de signal diffère de la célérité de groupe, elle est constante, c'est une moyenne pondérée, elle dépend à la fois de la dispersion et de la structure du signal par son spectre d'amplitude $A(k)$.

3. Ondes guidées et dispersion géométrique.

Le guide d'ondes idéal limité par deux faces planes et parallèles parfaitement réfléchissantes va nous permettre d'illustrer d'une manière simple, les notions de dispersion, de célérités de phase et de groupe. Puis nous présenterons un cas concret, la propagation acoustique sous-marine par petits fonds. Dans cet exemple nous mettrons en évidence les précurseurs et le signal.

3.1. Le guide d'ondes à faces parallèles.

3.1.1. Modes de propagation.

Soit un milieu homogène limité par deux frontières planes et parallèles parfaitement réfléchissantes (fig.7), et supposons pour simplifier le problème plan. L'équation des ondes s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \phi = 0, \quad (26)$$

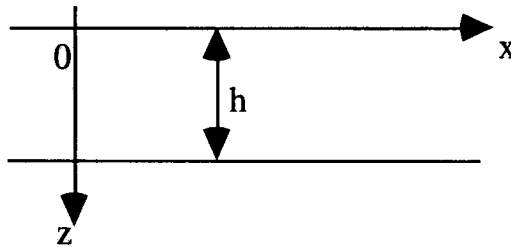


Fig.7

Cherchons une solution de la forme:

$$f(x, z, t) = f(z) e^{i(\pm kx - \omega t)}, \quad (27)$$

qui représente une onde se propageant suivant les x croissants (signe +) et une onde se propageant suivant les x décroissants (signe -) à la vitesse de phase

$$c = \frac{\omega}{k} . \quad (28)$$

(Nous supposons le guide illimité dans ces directions).

Portons (27) dans l'équation des ondes (26) qui pour $\phi(z)$ prend la forme:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \gamma^2 \phi = 0, \quad (29)$$

avec

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2 = k^2 \left(\frac{c^2}{c_0^2} - 1 \right). \quad (30)$$

Si les deux frontières sont libres, la condition aux limites correspondante $\phi = 0$ exige pour $z = 0$ une fonction ϕ de la forme :

$$\phi(z) = A \sin \gamma z . \quad (31)$$

La même condition sur $z = h$ ne sera satisfaite que si :

$$\gamma_m h = m \pi, \quad m = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Ainsi la présence de la deuxième frontière limite les valeurs positives de γ , ou valeurs propres, à une suite discrète de valeurs γ_m correspondant aux valeurs entières de m . A chaque valeur de m correspond un mode de propagation.

3.1.2. Célérité de phase et dispersion.

L'équation (32) porte le nom d'équation caractéristique. Sa forme est très simple dans le cas du guide parfait homogène.

On peut l'écrire:

$$\omega = \left(\omega_{0m}^2 + k^2 c_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou encore} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(1 - \frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2} \right). \quad (33)$$

$$\omega_{0m} = \frac{c_0}{h} m \pi , \quad (34)$$

représente la fréquence de coupure du $m^{\text{ième}}$ mode.

Les courbes de dispersion $\omega_m(k)$ de chaque mode forment une famille d'hyperboles ayant la droite $\omega = kc_0$ pour asymptote commune (fig.8).

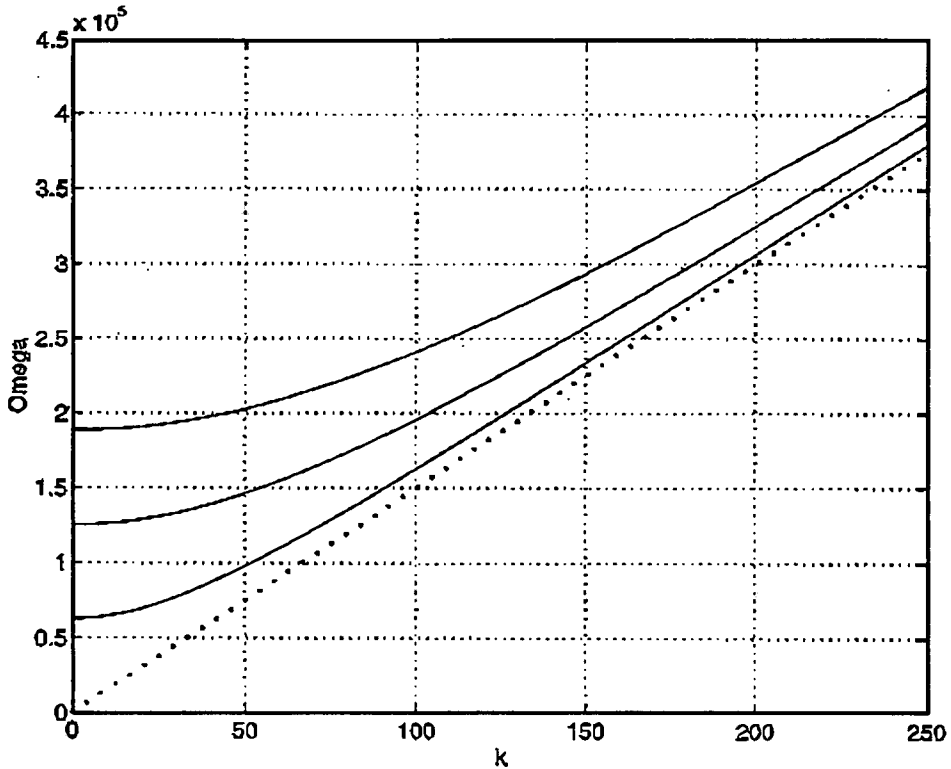


Fig.8.

Il est facile de déduire de (33) la célérité de phase des ondes suivant l'axe x du guide. On obtient:

$$c_m = \frac{\omega}{k_m} = c_0 \left(1 - \frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Elle dépend de la fréquence, c'est pourquoi on dit que la propagation est dispersive.

$$\text{Pour } \omega \rightarrow \infty \quad c_m \rightarrow c_0$$

$$\text{Pour } \omega = \omega_{0m} \quad c_m \rightarrow \infty$$

La relation (35) permet en outre de déterminer les directions de propagation permises.

$$\sin \theta_m = \frac{c_0}{c_m} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \quad (36)$$

$$c_m = \frac{c_0}{\sin \theta_m} .$$

3.1.3. Célérité de groupe.

La célérité de groupe est donnée par:

$$U = \frac{d\omega}{dk} .$$

Dérivons par rapport à ω l'équation caractéristique (33) du guide d'onde, nous obtenons

$$\omega d\omega = c_0^2 k dk ,$$

$$\text{d'où } \frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = c_m U_m = c_0^2 .$$

Soit encore d'après (36),

$$U_m = c_0 \sin \theta_m . \quad (37)$$

La fig.9 représente ces résultats.

Le produit $U_m c_m = c_0^2$ est constant et égal au carré de la vitesse de propagation de l'onde libre.

La célérité de phase est celle du plan d'onde suivant l'axe du guide. La célérité de groupe est celle d'un point du plan d'onde dans la direction du guide.

La célérité de groupe s'obtient à partir de la condition $U_m c_m = c_0^2$ et de la formule (35) ,soit:

$$U_m = c_0 \left(1 - \frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (38)$$

$$\text{Pour } \omega \rightarrow \infty \quad U_m \rightarrow c_0$$

Pour la fréquence de coupure

$$\omega = \omega_{0m} \quad U_m = 0$$

Les variations de la célérité de phase c_m (relation 35) et de la célérité de groupe U_m (relation 38) sont représentées sur la fig. 10.

La dispersion étant normale la célérité de phase décroît quand la fréquence augmente.

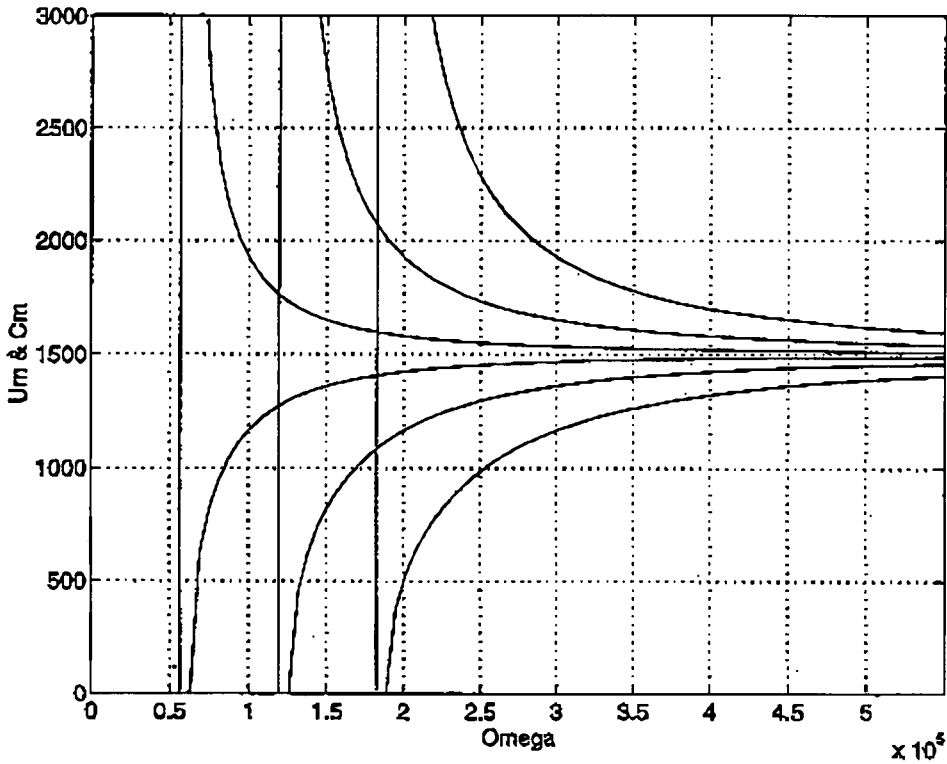


Fig.10

3.2. La propagation par petits fonds marins.

La propagation par petits fonds marins est une propagation guidée entre la surface et le fond de la mer, mais ici les conditions aux limites sur le fond sont plus difficiles à exprimer. Elles conduisent à une équation de dispersion, ou condition d'interférence, plus complexe que l'équation

$$\gamma_m h = m\pi ,$$

relative au guide "académique".

3.2.1. La relation de dispersion.

Etablissons cette condition dans le cas d'un modèle simple, constitué par une couche d'eau reposant sur un fond fluide de masse volumique et de vitesse du son supérieures à celles de l'eau.

Le problème est ici plus compliqué car la condition limite sur le fond n'est pas de la forme $\Phi(\gamma_n H) = 0$.

Il faut tenir compte d'un coefficient de réflexion et du déphasage qu'il introduit . La condition d'interférences constructives entre les rayons (1) et (3) s'écrit (Fig.11):

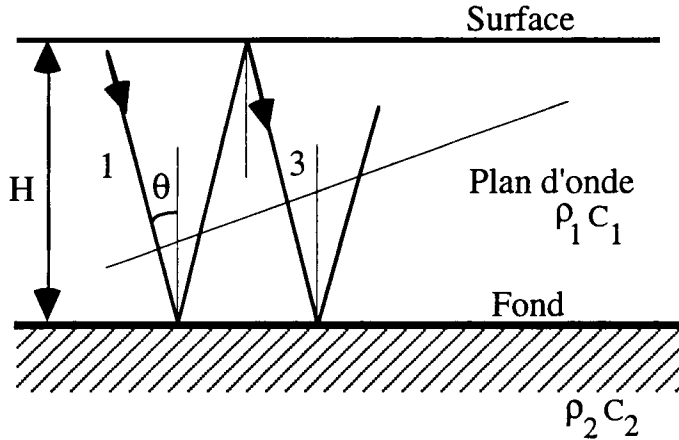


Fig.11.

$$\frac{4\pi f H}{c_1} \cos \theta_n - \varepsilon = (2n - 1) \pi . \quad (39)$$

Dans le cas d'un fond parfaitement plan de masse volumique ρ_2 et de célérité c_2 le coefficient de réflexion s'écrit:

$$R_F(\theta) = \frac{\frac{1}{b} - \frac{\sqrt{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - \sin^2 \theta}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}}{\frac{1}{b} + \frac{\sqrt{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - \sin^2 \theta}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}} , \quad b = \frac{\rho_1}{\rho_2} . \quad (40)$$

Il existe un angle d'incidence limite θ_1 donné par:

$$\sin \theta_1 = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{tel que:}$$

Si $\theta < \theta_1$ $R_F(\theta) < 1$ réel, l'amplitude de l'onde réfléchie est affaiblie mais il n'y a pas déphasage.

Si $\theta > \theta_1$ $R_F(\theta)$ est complexe et a pour module 1, l'onde réfléchie n'est pas affaiblie mais subit un déphasage ε donné par:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}. \quad (41)$$

A la surface libre eau-air, l'onde réfléchie n'est pas affaiblie mais subit une inversion de phase dans laquelle, quelle que soit l'incidence, $R_S(\theta) = -1$.

La condition d'interférences constructives donne l'équation caractéristique:

$$\operatorname{tg}(k H \cos \theta_n) = - \frac{\rho_2 \cos \theta_n}{\rho_1 \sqrt{\sin^2 \theta_n - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}}. \quad (42)$$

Le nombre de modes possibles est déterminé par le nombre de solutions de l'équation caractéristique (42).

Les solutions θ_n réelles de (42) sont obtenues par une résolution graphique (fig.12). Elles correspondent aux angles d'incidence possibles de propagation des différents modes.

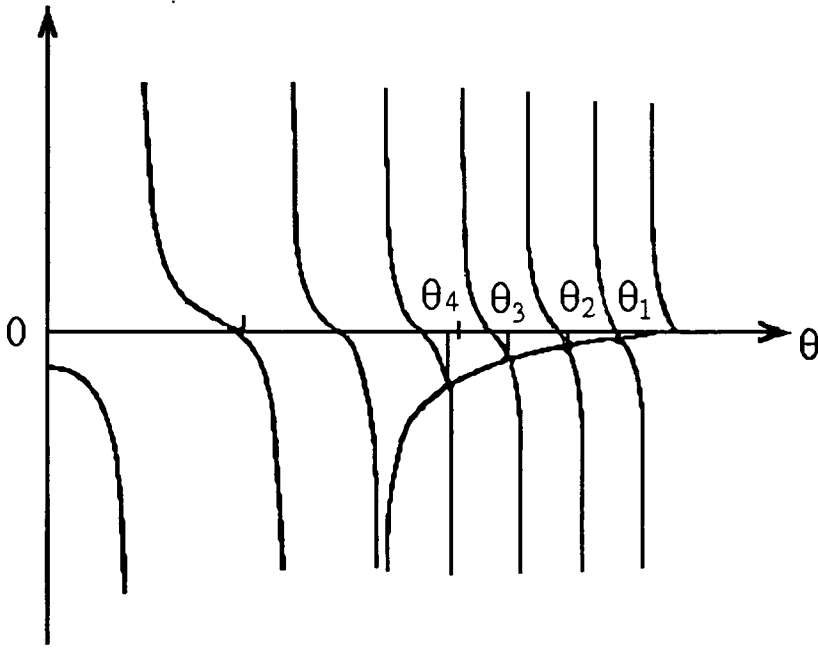


Fig.12.

3.2.2. Calcul du champ total.

La théorie de Pekeris [8] est la plus simple pour décrire la propagation modale par petit fond. Elle est établie pour une couche d'eau d'épaisseur H constante, de masse volumique ρ_1 et de célérité c_1 constantes, située au dessus d'un autre liquide infiniment profond de masse volumique ρ_2 et de célérité c_2 constantes et supérieures à celles de l'eau. Les deux milieux sont infinis dans la direction horizontale.

Pour une source d'immersion h_s le champ acoustique en un point (r, z) de la couche d'eau s'exprime au moyen de la relation:

$$\Phi(r, z) = \frac{2\pi}{H} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sum_{n=1}^N G(k_n) \sin(\gamma_{1n} h_s) \sin(\gamma_{1n} z) \frac{e^{-i(k_n r + \pi/4)}}{\sqrt{k_n}} \quad (43)$$

Le champ acoustique se présente sous la forme d'une somme de termes chacun correspondant à un mode de propagation.

L'excitation des modes en fonction de la profondeur de la source varie comme le facteur $\sin(\gamma_{1n} h_s)$ de l'expression (43). Elle varie comme le facteur $\sin(\gamma_{1n} z)$ de cette même expression en fonction de la profondeur du récepteur.

La fig. 13 montre pour les trois premiers modes l'amplitude de la pression en fonction de l'immersion.

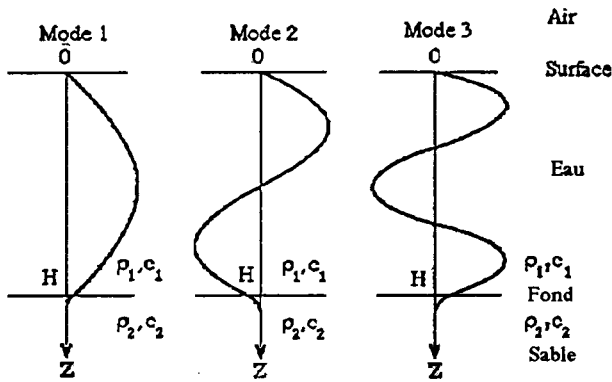


Fig.13

3.2.2. Filtrage des modes.

Les figures 14 représentent le champ acoustique en fonction de la distance à l'émetteur pour deux et trois modes présents. Elles mettent en évidence les phénomènes d'interférence dus aux réflexions multiples entre la surface et le fond; le signal reçu est la somme de signaux ayant suivis des trajets différents.

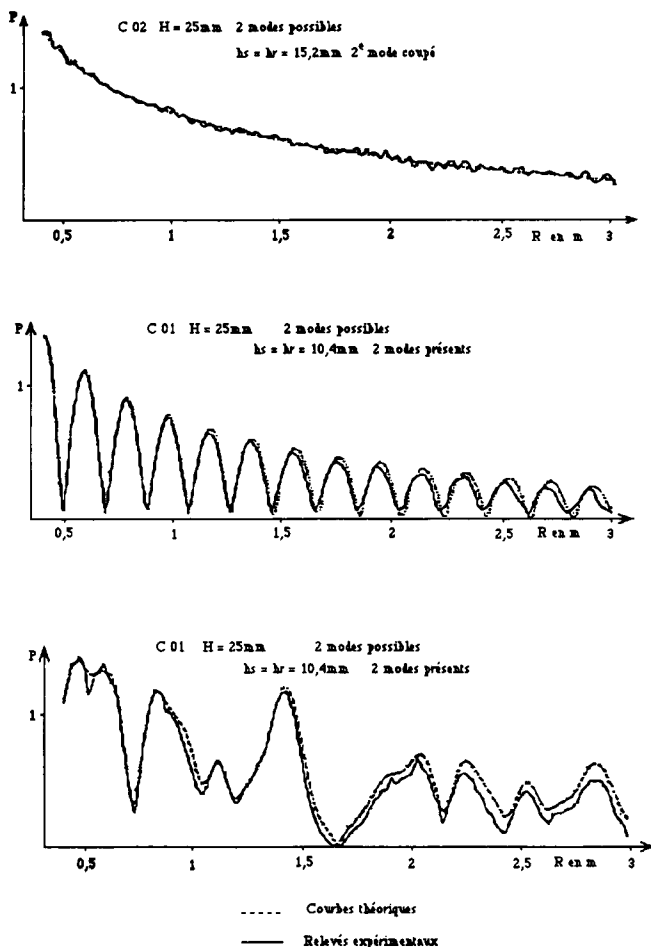


Fig.14.

Si l'on veut étudier la dispersion sur un mode donné il est donc nécessaire de séparer les signaux correspondant à chaque mode, cela est possible en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions de la profondeur [9],

$$Z_m^{(1)}(z) = \sin(\beta_{1n} z_i). \quad (44)$$

Sur le plan expérimental on réalise un filtrage spatial des modes au moyen d'un récepteur constitué par un réseau vertical de capteurs également répartis suivant l'immersion z . Le principe du filtrage est illustré par la fig. 15.

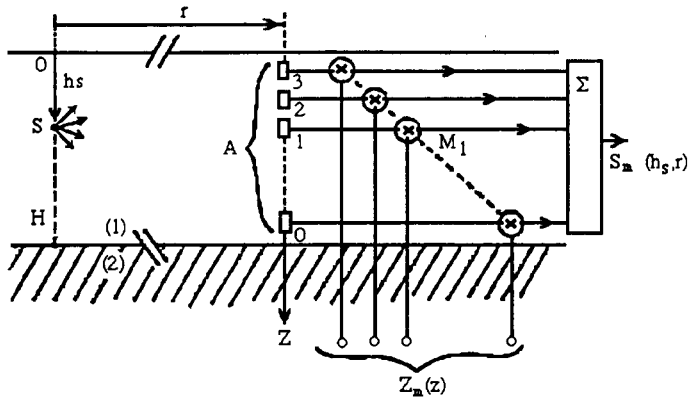


Fig.15.

Le gain de chaque capteur est proportionnel à la valeur correspondante de la fonction de la profondeur (44) du mode à sélectionner, en sortie des capteurs les signaux sont additionnés de sorte que leur somme soit proportionnelle à l'amplitude du mode filtré.

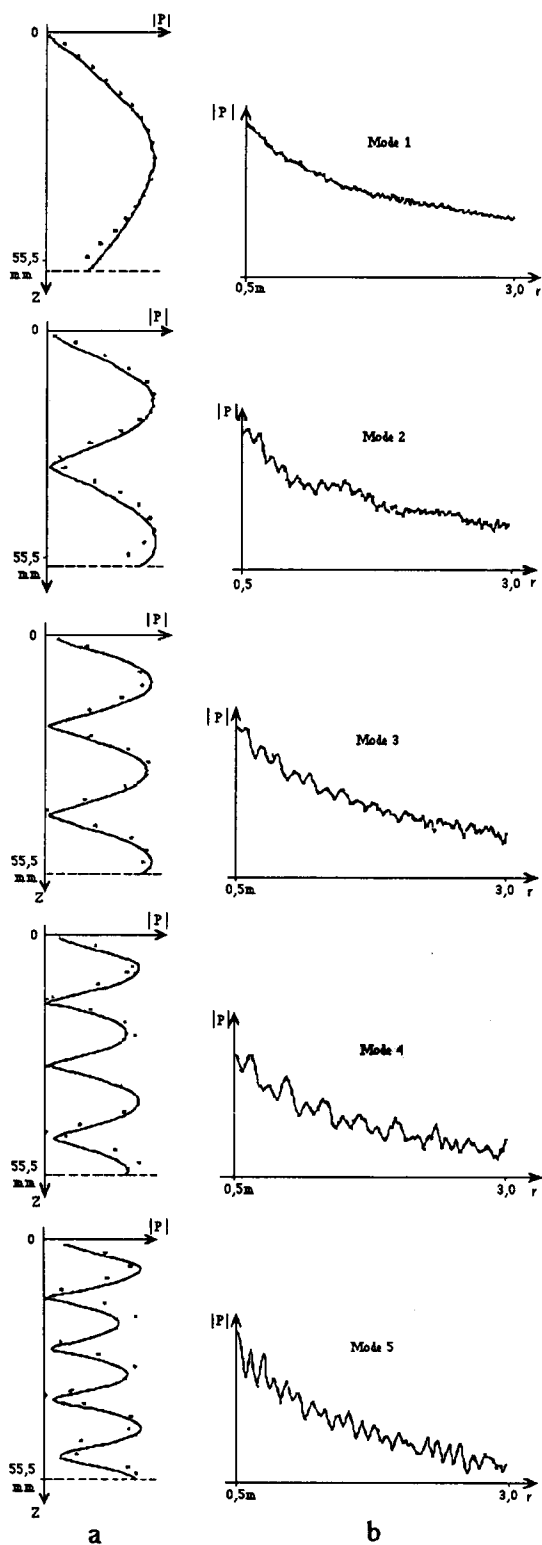


Fig.16.

Les relevés expérimentaux ont été réalisés sur un modèle réduit dans une cuve acoustique de 5m de long sur 2m de large. La propagation s'effectue dans une lame d'eau, d'épaisseur 57mm, reposant sur un fond de sable. La fréquence de la source est de 124 kHz. Le récepteur est un réseau vertical de 15 capteurs piézoélectriques dont les gains sont proportionnels aux valeurs de la fonction de la profondeur $Z_m^{(1)}(z_i)$ du mode à sélectionner [10].

La fig.16a montre les résultats obtenus pour les cinq premiers modes quand, pour une distance émetteur-récepteur fixe, on déplace verticalement l'émetteur. En sortie du récepteur on obtient la distribution verticale du mode que l'on a excité. Si au contraire on modifie la distance, on obtient fig.16b la décroissance du mode correspondant. Les fluctuations dues aux interférences de modes ont disparu.

Si le signal émis est un train d'ondes de quatre périodes à fréquence fixe de 124 kHz qui excite les cinq modes de propagation, la technique de filtrage permet de les séparer comme le montre la fig.17 où l'on distingue nettement les cinq modes reçus.

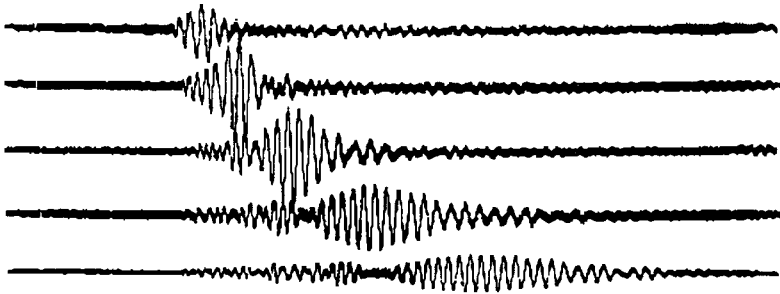


Fig.17.

Les signaux reçus se composent de groupes d'ondes dont le groupe principal est situé autour de la fréquence émise de 124 kHz et des groupes secondaires dont l'amplitude décroît rapidement au fur et à mesure que l'on s'éloigne du groupe principal qui constitue le signal proprement dit. Les fréquences élevées arrivent les premières et constituent les précurseurs dont l'instant d'arrivée est difficile à apprécier avec précision.

Appliquons la méthode de la phase stationnaire [11] afin de synthétiser les signaux reçus, le signal émis étant toujours un train d'ondes à fréquence pure. Partons de la relation (14) qui permet de calculer l'amplitude du signal reçu à l'instant d'observation t_0 et à la distance x de la source. Pour cette valeur t_0 , l'équation dans laquelle on a fait $x_0 = 0$ donne la valeur de la célérité de groupe U_0 .

Connaissant les variations de cette célérité on en déduit la valeur de f_0 puis de c_0 si l'on connaît également les variations de la célérité de phase en fonction de la fréquence. Les variations de c et de U sont données par des courbes du type de celles de la fig.10. Connaissant t_0 , U_0 , c_0 et f_0 on calcule

l'amplitude du signal reçu à l'instant t_0 , à partir de la relation (14) et ainsi de suite pour d'autres valeurs de t_0 afin d'obtenir la totalité du signal.

La fig.18 montre le résultat obtenu, qui est à comparer au résultat expérimental de la fig.17. Le signal synthétique est tout - à - fait comparable au signal expérimental.

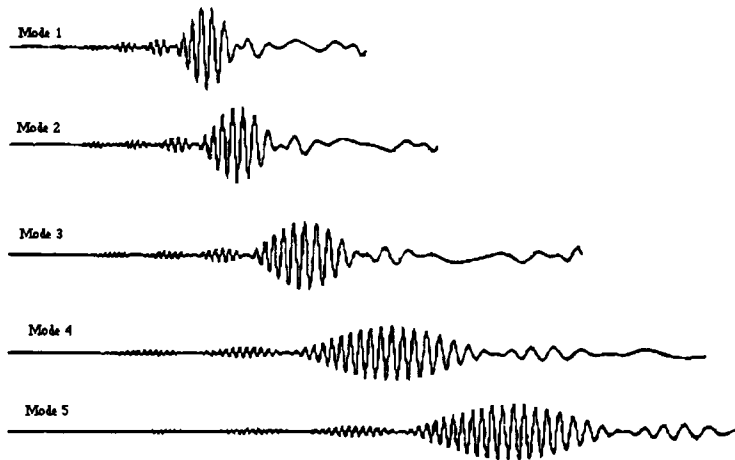


Fig.18.

Annexe.

Résumé des définitions et des principales formules.

1. Célérité de phase, célérité de groupe au sens de Rayleigh.

C'est le cas de la propagation d'un signal à bande étroite, par exemple un phénomène de battements entre deux ondes de pulsations voisines.

a) la célérité de phase, est la célérité de la porteuse, elle est définie par le rapport:

$$c = \frac{\omega}{k},$$

b) la célérité de groupe est la célérité de la modulation, à la limite lorsque les deux fréquences tendent vers la même valeur, la célérité de groupe est définie par la quantité:

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k},$$

soit encore en fonction de la longueur d'onde λ :

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}.$$

Si la propagation n'est pas dispersive la célérité de phase est constante, donc célérité de phase et célérité de groupe ont la même valeur.

2. Paquets d'ondes, groupes d'ondes.

C'est le cas de la propagation d'un signal de durée finie (train d'ondes) dont le spectre de Fourier s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ dans le domaine des fréquences.

Le problème est résolu au moyen de la méthode de la phase stationnaire due à Lord Kelvin.

La célérité de groupe est définie pour les valeurs qui rendent stationnaires la phase $\Theta = kx - \omega(k) t$ du signal, soit:

$$\frac{d\Theta}{dk} = x - \frac{\partial \omega}{\partial k} t = 0.$$

En posant $U = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

on définit la célérité de groupe par $U = x/t$.

Sa valeur dépend du point d'observation x , c'est la célérité d'une perturbation appelée groupe d'ondes ou paquets d'ondes qui apparaît au point x à l'instant t ; cette perturbation est caractérisée par le nombre d'onde k .

L'instant t est le retard de groupe décrivant l'instant d'apparition de chaque fréquence.

3. Fronts et vitesse de front.

a) Fronts de première espèce à vitesse constante.

Le front de première espèce apparaît quand la célérité de groupe passe par un extremum c'est-à-dire quand $\partial U / \partial k = 0$.

L'instant d'apparition du front en un point d'observation x est donné par

$$t = \frac{x}{U_m}$$

U_m étant la valeur maximale ou minimale de la célérité de groupe.

b) Fronts de deuxième espèce à vitesse constante.

Ces fronts correspondent à l'arrivée de groupes d'ondes de fréquences élevées, donc de nombres d'ondes élevés. Ils se propagent à une vitesse constante c_0 qui est la célérité de phase dans le milieu homogène infini.

4. Vitesse de signal.

La vitesse de signal est liée à la définition d'un "repère de position" associé au paquet d'ondes et indépendant de la forme du signal émis et de son étendue spectrale.

Après avoir défini "un centre de signal", en d'autres termes le barycentre du signal, on constate que le centre du signal est doté d'un mouvement uniforme de vitesse

$$V_s = \int \frac{A^* U A}{|A^*|^2} dk$$

La vitesse de signal est la moyenne pondérée des célérités de groupe des différentes fréquences, le facteur de pondération $|A|^2$ est proportionnel à l'énergie du signal.

Bibliographie .

- [1] Lord Rayleigh, (J.W., Stutt), The theory of sound. (Unabridged 1896 2nd ed.). Dover Publications, 1945, New York.
- [2] Eckart, C., The approximate solution of one - dimensional wave equation. Rev. Mod. Phys. 20. [1948], 399 - 417.
- [3] Lord Kelvin , On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in dispersive media. Proc. Lond. Math. Soc. II [1904], 371.
- [4] Tolstoy, I., Clay, C., S., Ocean Acoustics. Mc Graw - Hill, 1966, New York.
- [5] Bonnet, G., Au-delà de la vitesse de groupe : vitesse d'onde et vitesse de signal.
Première Partie: L'opérateur vitesse de groupe en l'absence d'affaiblissement. Ann. Telecommun 38 - [1983], 345 - 366.
Deuxième Partie: Déformation de l'amplitude et influence de l'affaiblissement. Ann. Telecommun. 38 [1983], 471 - 487.
- [6] Ville, J., Théorie et applications de la notion de signal analytique. Câbles et Transmission. 1 [1948], 61 - 74.
- [7] Bradford, H., M., Propagation and spreading of a pulse or wave packet. Am. J. Phys. 44 [1976], 1058 - 1063.
- [8] Pekeris, C., L., Theory of propagation of explosive sound in shallow water. Geol. Soc. Am., Meur. 27 [1948].
- [9] Gazanhes, C., Sessarego, J., P., Garnier, J., L., Identification of modes in some conditions of sound propagation in shallow water. J. Sound. Vibr. 56 [1978], 251 - 259.
- [10] Gazanhes, C., Garnier, J., L., Experiments on single mode excitation in shallow water propagation. J. Acoust. Soc. Am. 69 [1981], 963 - 969.
- [11] Gazanhes, C., Garnier, J., L., Sessarego, J., P., Signal processing for multimodal transmission in shallow water propagation: Application to underwater acoustic communication. Signal Processing. 6 [1984], 167 - 185.

CHAPITRE 2

LA DISPERSION ANORMALE OU INVERSE

1. Introduction.

Dans ce chapitre nous abordons l'étude de la dispersion en milieux dissipatifs. La propagation d'une onde acoustique dans un milieu réel donne lieu à des dissipations d'énergie qui ont une origine liée aux propriétés physiques du milieu: viscosité, conduction thermique, processus moléculaires complexes, etc. Ces dissipations entraînent une décroissance de l'intensité acoustique avec la distance parcourue suivant la loi générale,

$$I = I_0 e^{-2\alpha x}, \quad (1)$$

où x représente la distance parcourue, I_0 l'intensité de référence par exemple en $x = 0$. Ce peut être l'intensité émise par la source.

α est le coefficient d'absorption ou encore d'amortissement. Il se mesure en Neper par mètre, lorsque x est exprimé en mètre et I ou I_0 en $W.m^{-2}$

L'absorption est à l'origine de la dispersion anormale, ou de relaxation, prévue en 1928 par Herzfeld et Rice [1].

Stokes en 1841, puis Kirchhoff en 1868, ont montré que les coefficients d'absorption dus aux pertes par viscosité ou par conductions thermiques dépendaient du carré de la fréquence. Cet amortissement "classique" est noté:

$$\alpha = b \omega^2. \quad (2)$$

Selon le théorème de Paley et Wiener, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $x(t)$ soit causale est que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\text{Log}|X(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega \quad (3)$$

soit convergente, $X(\omega)$ étant la transformée de Fourier de $x(t)$.

Pour une onde progressive plane d'amplitude $X(\omega) = e^{-\alpha(\omega)}$ par unité de longueur, la condition (3) devient:

$$\int_a^\infty \frac{|\alpha(\omega)|}{\omega^2} d\omega < \infty, \quad (4)$$

pour a suffisamment grand.

Si, comme nous venons de le voir $\alpha = b \omega^2$, l'intégrale (4) diverge, montrant par-là que les théories classiques sont insuffisantes pour décrire les mécanismes de l'absorption. Or expérimentalement on observe que l'absorption s'écarte de la loi classique et présente un maximum pour une fréquence caractéristique. On appelle ce type d'absorption, absorption anormale. Herzfeld et Rice [1] en proposèrent une première théorie basée sur la thermodynamique des processus irréversibles. Cette théorie prévoit un coefficient d'absorption ayant la forme générale:

$$\alpha = \frac{A\omega^2}{\omega_R^2 + \omega^2}, \quad (5)$$

où A est une constante qui dépend du processus de relaxation mis en jeu, ω_R étant la pulsation de relaxation. Dans ce cas l'intégrale (4) converge, la condition de Paley et Wiener est satisfaite.

Revenons à l'onde plane; après avoir parcouru une distance x dans un milieu absorbant, celle-ci s'écrit:

$$p(x,t) = A e^{-\alpha x} e^{i\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)} = A e^{(i\omega t - \gamma x)}. \quad (6)$$

Le nombre d'onde:

$$\gamma = \frac{1}{c} - i \frac{\alpha}{\omega} \quad (7)$$

est complexe, la célérité de groupe cesse donc d'avoir une signification physique claire. On admet généralement que célérité de phase et absorption sont liées biunivoquement par les relations de Kramers - Krönig, α étant, nous l'avons vu, fonction de la fréquence, il en est donc de même pour la célérité de phase. Dans les milieux réels, l'absorption est à l'origine de la dispersion de vitesse.

2. Les relations de dispersion de Kramers - Krönig.

Les relations qui lient la dispersion de vitesse à l'absorption ont été obtenues par Krönig [2] en 1926 et par Kramers [3] en 1927 dans le cadre de la propagation des ondes électromagnétiques et des rayons X. Plus tard, en 1940, Bode [4] établit des relations analogues entre le gain d'un amplificateur et le déphasage qu'il introduit. Ces relations approchées, dites locales, s'appliquent également à l'acoustique, liant l'absorption à la célérité de phase.

Les relations de Kramers - Krönig jouent un rôle fondamental, car il est bien rare que l'expérimentateur ait accès à la fois à la dispersion de vitesse et à l'absorption, elles permettent alors de calculer la dispersion à partir de l'absorption et vice versa.

2.1. Causalité et relations de Kramers - Krönig.

Tout système physique vérifie le principe de causalité, en particulier la réponse impulsionnelle doit être causale, donc nulle pour $t < 0$. Si $h(t)$ est cette réponse on écrira :

$$h(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0 ,$$

$$h(t) \neq 0 \quad \text{pour } t \geq 0 .$$

Il en résulte que la fonction de transfert $H(\omega)$ transformée de Fourier de $h(t)$ sera complexe, de la forme :

$$H(\omega) = A(\omega) + i B(\omega) .$$

Les parties réelle et imaginaire ne sont pas indépendantes, mais transformée de Hilbert l'une de l'autre de sorte que

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' , \quad (8)$$

$$B(\omega) = \frac{-1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' . \quad (9)$$

(VP: valeurs principales de Cauchy).

En observant [5] que :

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\omega - \omega'} = 0$$

(VP pour $\omega = \omega'$ et pour $|\omega'| \rightarrow \infty$)
on peut éviter l'emploi des valeurs principales de Cauchy en écrivant:

$$A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(\omega) - B(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega',$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\omega) - A(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'.$$

Cas des réponses impulsionnelles réelles.

Si $h(t)$ est réel alors $H(\omega) = H^*(-\omega)$ ce qui entraîne que:

$A(\omega)$ est réel et pair $A(\omega) = A(-\omega)$

$B(\omega)$ est réel et impair $B(\omega) = -B(-\omega)$ d'où, en portant dans (8) et (9), il vient

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \text{VP} \int_0^{\infty} \frac{\omega' B(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega', \quad (10)$$

$$B(\omega) = -\frac{2}{\pi} \text{VP} \int_0^{\infty} \frac{\omega' A(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'. \quad (11)$$

2.2. Application à l'acoustique.

Supposons qu'une onde plane de la forme (8) se propage dans un milieu de compressibilité [6]:

$$K(\omega) = K_1(\omega) + i K_2(\omega). \quad (12)$$

Dans ce cas les relations (10) et (11) de Kramers - Krönig deviennent:

$$K_1(\omega) = \frac{2}{\pi} \text{VP} \int_0^{\infty} \frac{\omega' K_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad (13)$$

$$K_2(\omega) = -\frac{2}{\pi} \text{VP} \int_0^{\infty} \frac{\omega K_1(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (14)$$

Elles peuvent être utilisées pour établir une relation entre célérité de phase et atténuation.

Le nombre d'onde complexe:

$$k = \frac{\omega}{c(\omega)} + i \alpha(\omega), \quad (15)$$

dépend de la compressibilité par la relation:

$$k^2 = \omega^2 \rho K(\omega). \quad (16)$$

Dans l'hypothèse où $\alpha(\omega) c(\omega) / \omega \ll 1$ la célérité de phase et l'atténuation sont déterminées par:

$$c(\omega) = 1 / [\rho K_1(\omega)]^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\rho c(\omega)}{2} \omega K_2(\omega). \quad (18)$$

2.3. Relations locales entre vitesse et absorption.

♦ Les relations (13) et (14) associées aux relations (17) et (18) sont difficiles d'emploi, les intégrales (13) et (14) ne sont pas localisées; calculer la dispersion nécessite la connaissance de l'absorption pour toutes les fréquences.

♦ En s'inspirant des calculs de Bode [4] on peut obtenir des expressions locales entre dispersion et absorption. Dans le cadre de l'étude des amplificateurs à contre - réaction Bode a montré qu'il était possible, pour une fréquence donnée, de relier le déphasage aux variations locales du gain avec la fréquence. Cette approximation n'est valable que si le déphasage et le gain varient lentement autour de la fréquence considérée, ce qui exclut le cas des résonances.

Partant de l'équation (14) M. O' Donnell et ses collaborateurs [7] obtiennent les expressions locales suivantes:

$$\alpha(\omega) = \frac{\pi \omega^2}{2 c_0^2} \frac{dc(\omega)}{d\omega}, \quad (19)$$

$$\Delta c = c(\omega) - c = \frac{2 c_0^2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2} d\omega', \quad (20)$$

où $c(\omega) = c_0 + \Delta c(\omega)$ avec $\Delta c(\omega) \ll c_0$.

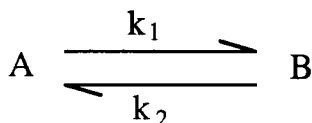
3. La Relaxation acoustique.

D'une manière très schématique on peut dire que le phénomène de relaxation est caractérisé par le fait que les perturbations engendrées par le passage d'une onde sonore ne suivent qu'avec retard l'application ou la suppression des contraintes.

En acoustique on distingue plusieurs types de relaxation [8] qui dépendent de la nature du milieu, fluide ou solide, de sa structure, des atomes ou molécules qui le composent, etc.

3.1. La Relaxation thermique.

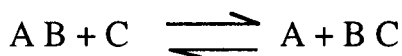
Elle est liée aux variations de température qui accompagnent l'onde acoustique qui se propage dans un fluide. Par conséquent si, lors d'une période, l'équilibre n'est pas atteint, ce sont les états de transition d'un équilibre à l'autre qui déterminent la propagation du son. L'amortissement dit de relaxation thermique est dû à la perturbation par ces variations de température d'un équilibre thermodynamique, chimique ou moléculaire, illustré dans le cas de deux états d'équilibre par le schéma suivant:



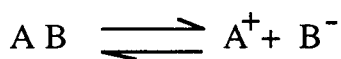
où A et B sont deux états d'équilibre correspondant à des niveaux d'énergie différents et où k_1 et k_2 sont des constantes de temps qui correspondent au temps nécessaire pour que le système passe de l'état A à l'état B et réciproquement. D'une manière générale c'est la chaleur spécifique qui intervient.

La mécanique statistique permettra de calculer les échanges d'énergie entre les degrés de liberté externes liés aux mouvements de translation des molécules et les deux degrés de liberté internes relatifs aux mouvements de rotation et de vibration des molécules. Le mouvement de rotation n'existe que pour les molécules polyatomiques où cette rotation prend place autour d'axes bien définis.

• La théorie cinétique des réactions permettra de calculer les échanges d'énergie entre les constituants d'une réaction chimique:



ou d'une réaction de dissociation (électrolyte):



- La thermodynamique des processus irréversibles fait intervenir les grandeurs d'état thermique à côté des coefficients phénoménologiques tels la viscosité, la conduction et la diffusion thermique... Elle est également la base de la thermoélasticité des solides.

3.2. La relaxation de volume ou de structure.

La relaxation de volume ou de structure se manifeste dans les liquides associés où il existe une structure ordonnée à courte distance et dans les solides; elle est donc liée aux forces intermoléculaires qui organisent la matrice, liquide ou solide, en une structure de réseau. Elle est liée aux variations de volume qui accompagnent l'onde acoustique et c'est donc la compressibilité qui intervient ici. Si la température augmente, la structure de réseau se dégrade, des "trous" apparaissent. Au contraire si la pression augmente, le volume diminue, le nombre de "trous" diminue, la structure de réseau augmente. Pour mettre en évidence la part de la contribution structurale à la compressibilité, il faut envisager des expériences dans lesquelles l'échelle de temps est petite devant le temps nécessaire pour qu'un réarrangement de structure puisse se produire, ou bien il faut figer les propriétés structurales du liquide en le refroidissant.

Dans le cas des solides, la relaxation de volume est due essentiellement aux imperfections du réseau cristallin, impuretés, dislocations.

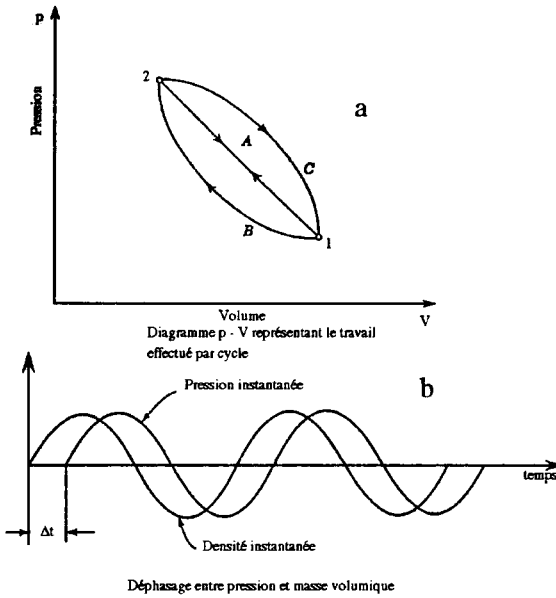
3.3. La relaxation viscoélastique.

En élasticité classique, la loi de Hooke établit que les déformations en tout point d'un solide élastique parfait ne sont fonctions que des contraintes; si celles-ci disparaissent, la déformation disparaît instantanément. La contrainte est une fonction linéaire de la déformation.

- En hydrodynamique classique, la loi de Newton énonce que la contrainte est une fonction linéaire de la dérivée, par rapport au temps, de la déformation.

- Les milieux réels s'écartent des lois de Hooke et de Newton. Il arrive parfois que la contrainte dépende à la fois de la déformation, de sa dérivée temporelle, ou même des dérivées d'ordres supérieurs. Un milieu qui combine les propriétés caractéristiques des solides et des fluides est dit viscoélastique.

Le passage du comportement visqueux au comportement élastique quand la fréquence augmente est appelé "relaxation viscoélastique". Dans ce cas le diagramme contrainte - déformation, ou encore pression - volume, décrit une boucle dont la surface représente l'énergie dissipée par cycle (fig.1a)



En d'autres termes il existe un déphasage entre la pression instantanée appliquée au solide et le volume ou encore la masse volumique (fig.1b)

Fig.1.

4. Théorie phénoménologique de la relaxation.

4.1. Le modèle de Kelvin - Voigt.

La relaxation étant caractérisée par le fait que les perturbations engendrées par le passage d'une onde sonore ne suivent qu'avec retard l'application ou la suppression des contraintes, on peut en donner une image simple en prenant comme modèle la décharge d'un condensateur dans une résistance. L'analogie mécanique, connue sous le nom de modèle de Kelvin [10] Voigt [9] (1875 - 1892), consiste en un ressort placé en parallèle sur un amortisseur dit "visqueux" (dashpot) fig.2.

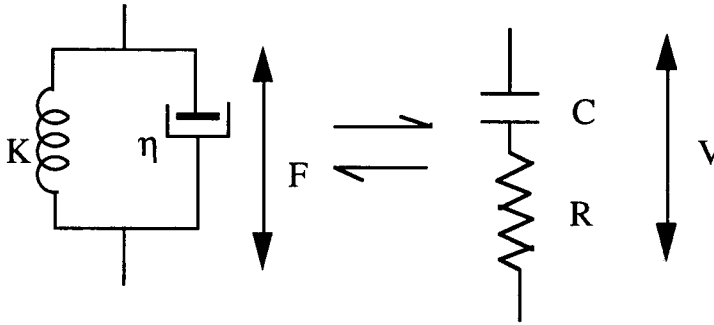


Fig.2.

La tension aux bornes du circuit électrique s'écrit:

$$V = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt}.$$

Par analogie on modifie l'équation d'état dans laquelle la contrainte est reliée non seulement aux déformations, mais également aux vitesses de déformation suivant la forme générale :

$$p = \kappa \Gamma + R \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad (21)$$

où κ est le module de compression, $\Gamma = \frac{dp}{\rho}$ la condensation, et R un coefficient de dissipation.

L'équation de propagation devient:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{R}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) \quad (22)$$

avec $c_0^2 = \frac{K}{\rho}$.

Pour calculer la célérité de phase $c(\omega)$ et le coefficient d'amortissement $\alpha(\omega)$ supposons une solution de (22) de la forme:

$$p = e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \beta x)} = e^{i(\omega t - \gamma x)}, \quad (23)$$

où $\gamma = \alpha + i\beta$ est la constante de propagation complexe telle que $\beta = \frac{\omega}{c}$.

Portons la solution (23) dans l'équation (22), après calcul nous obtenons:

$$c = \frac{c_0 \sqrt{2}}{\omega \tau} \sqrt{(1 + \omega^2 \tau^2) \left(\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} - 1 \right)}, \quad (24)$$

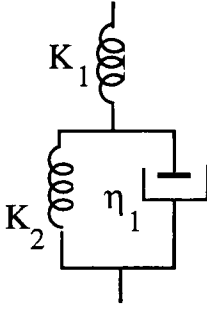
$$\text{et} \quad \alpha = \frac{\omega^2 \tau c}{2 c_0^2 (1 + \omega^2 \tau^2)}, \quad (25)$$

où $\tau = \frac{R}{\rho c_0^2}$ est le temps de relaxation.

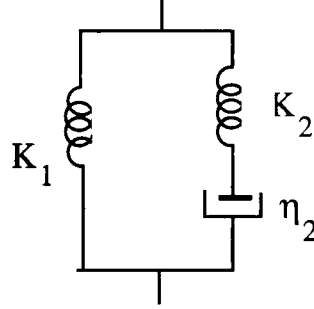
Nous obtenons bien que c et α dépendent de la fréquence, toutefois la célérité c tend vers l'infini avec la fréquence; or l'expérience montre qu'il n'en est rien, c tend vers une valeur limite constante quand ω tend vers l'infini.

4.2. Le modèle de Zener.

Le modèle de Kelvin - Voigt, trop simple, ne rend pas compte de l'ensemble des phénomènes de propagation. C'est pourquoi P. Debye en 1929 [11], puis Zener en 1948 [12] ont proposé un modèle comportant trois éléments comme le représente la figure 3.



Debye



Zener

Avec ce modèle on obtient:

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{\frac{1}{c_0^2} + \frac{i \omega \tau}{c_\infty^2}}{1 + i \omega \tau}, \quad (26)$$

d'où la célérité:

$$\frac{c^2}{c_0^2} = 1 + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (27)$$

et le coefficient d'amortissement par longueur d'onde:

$$\mu = \alpha \lambda = \frac{\pi \epsilon}{(1 - \epsilon)^{\frac{1}{2}}} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (28)$$

où $\epsilon = \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{c_0^2}$ représente l'amplitude de la dispersion.

c_0 étant la vitesse du son pour les fréquences basses,
 c_∞ étant la limite pour les fréquences élevées.

$$\tau = (\tau_1 \tau_2)^{\frac{1}{2}}$$

où τ_1 et τ_2 sont les constantes de temps de la branche série et de l'ensemble du circuit du modèle de Zener.

c_0 correspond au module relâché ($f \rightarrow 0$),

c_∞ correspond au module non relâché ($f \rightarrow \infty$).

Si l'on porte c^2 et μ en fonction de $\log \omega$ on obtient les courbes des figures 4 et 5 caractéristiques de la dispersion anormale. La célérité croît avec la fréquence, de la valeur c_0 en basse fréquence à la valeur c_∞ en haute fréquence. Elle possède un point d'inflexion pour la valeur $\omega = \frac{1}{\tau}$ de la pulsation, et le coefficient d'amortissement passe par un maximum pour cette même valeur de la pulsation.

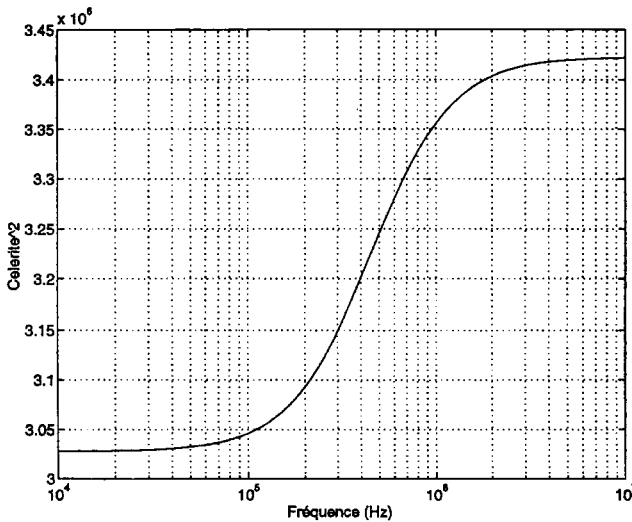


Fig.4.

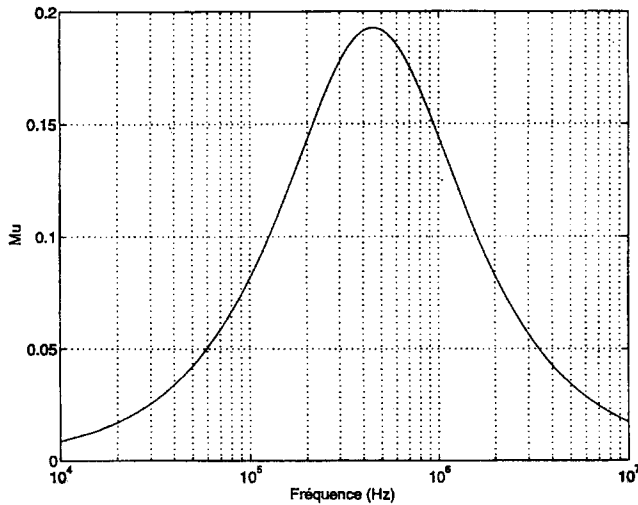


Fig.5.

Ces courbes ont été tracées pour les valeurs suivantes des paramètres:

$$c_0 = 1740 \text{ ms}^{-1} \quad c_\infty = 1850 \text{ ms}^{-1} \text{ et } f_R = 450 \text{ kHz.}$$

4.3. Diagramme de Cole.

Il est possible de tracer dans le plan complexe la partie imaginaire de (26) en fonction de la partie réelle, chaque point de la courbe obtenue étant caractérisé par une fréquence de mesure. Cette représentation, dite diagramme de Cole [13], a été développée pour mettre en évidence la présence d'une ou plusieurs fréquences de relaxation.

Ecrivons (26) sous la forme [14]:

$$S = \frac{c_0^2}{c^2} = \frac{1 + (1 - \epsilon) i \omega \tau}{1 + i \omega \tau} = \frac{1 + (1 - \epsilon) \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} - i \frac{\epsilon \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} = S_1 + i S_2. \quad (29)$$

Traçons S_2 en fonction de S_1 . Quand ω varie de 0 à l'infini la courbe décrit un demi-cercle de rayon $\epsilon / 2$ centré sur l'axe réel au point de coordonnées $S_1 = 1 - \frac{\epsilon}{2}$, $S_2 = 0$,

puisque:

$$S_2^2 + \left[S_1 - \left(1 - \frac{\epsilon}{r} \right) \right]^2 = \frac{\epsilon^2}{4},$$

comme on peut le vérifier à partir des valeurs de S_1 et S_2 déduite de (29).
Soit encore à partir de (27) et (28):

$$S_1 = \left(\frac{c_0}{c} \right)^2 \text{ et } S_2 = \left(\frac{c_0}{c} \right)^2 \frac{\mu}{\pi}.$$

La fig.6 montre le diagramme de Cole obtenu avec les valeurs des paramètres correspondant aux courbes des fig.4 et 5.

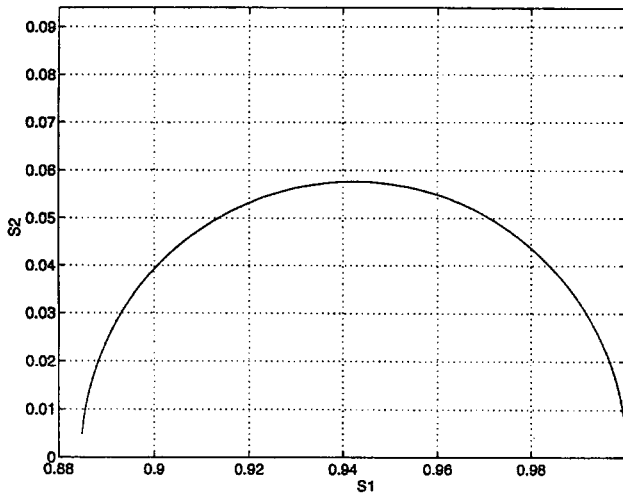


Fig. 6.

5. Un exemple de relaxation : la dispersion de vitesse dans un produit bitumineux.

Lorsqu'on fait varier la température d'un corps viscoélastique, le mouvement des chaînes moléculaires qui le composent se modifie profondément. Qualitativement, on peut dire qu'aux très hautes températures les chaînes moléculaires complètes peuvent se mouvoir librement comme dans le cas des polymères liquides, par contre aux très basses températures, les chaînes moléculaires sont figées, c'est l'état vitreux qui correspond à certains polymères solides. Entre ces deux extrêmes il existe une zone de transition plus ou moins étendue dans laquelle le corps viscoélastique se comporte comme un caoutchouc, les chaînes moléculaires adjacentes sont reliées entre elles à intervalles irréguliers par des liaisons latérales, les mouvements sont alors limités à quelques segments de la chaîne.

Le bitume présente ces trois types de comportement dans une plage de températures relativement réduite et facile à obtenir [15].

L'étude de cette transition à partir de la transmission d'une onde ultrasonore permet de mettre en évidence le phénomène de relaxation qui accompagne le mouvement des chaînes moléculaires.

Les courbes de la figure 7 montrent les variations de l'amortissement α et de la célérité de phase c en fonction de la température pour un bitume soufflé type 90 / 40 entre les températures de -30°C à 150°C et pour des fréquences comprises entre 300 kHz et 2 MHz.

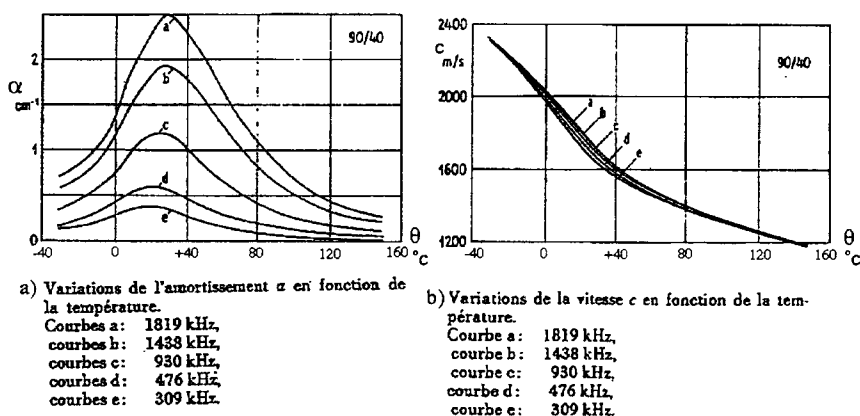


Fig.7.

L'amortissement passe par un maximum qui décroît avec la fréquence en se déplaçant vers les basses températures, ce qui indique que le temps de relaxation des chaînes moléculaires augmente quand la température diminue.

La célérité c décroît quand la température augmente. On note une légère dispersion de la célérité au centre de la zone de transition caoutchoutique.

La dispersion est bien mise en évidence si, pour une température donnée, on trace le carré de la célérité en fonction de $\log f$, comme cela est représenté sur la fig.8.

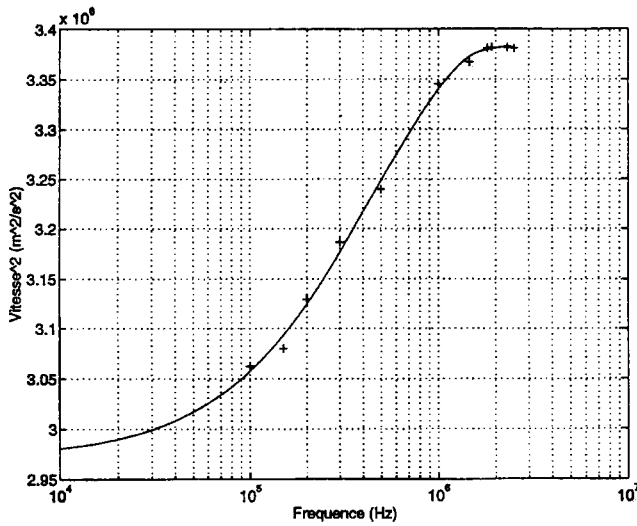


Fig.8.

Les résultats expérimentaux ont été ajustés au sens des moindres carrés par un polynôme.

On retrouve la forme théorique de la fig.4, dont les paramètres c_0 , c_∞ et f_R correspondent à ceux du bitume.

La fig.9 montre les variations de μ en fonction de la fréquence; elles ont été calculées à l'aide des relations locales entre vitesse et absorption, les valeurs de α étant obtenues à partir de la relation (19),

$$\alpha(\omega) = \frac{\pi \omega^2}{2 c_0^2} \frac{d c(\omega)}{d \omega}.$$

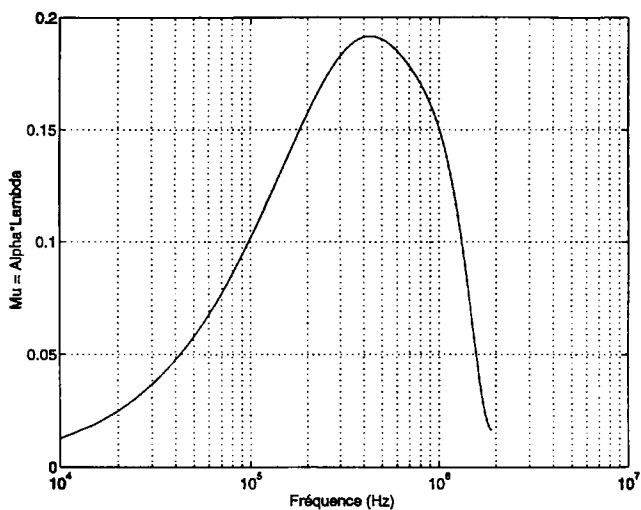


Fig.9.

Enfin la fig.10 représente le diagramme de Cole. Seules les valeurs centrales sont au voisinage du demi-cercle théorique.

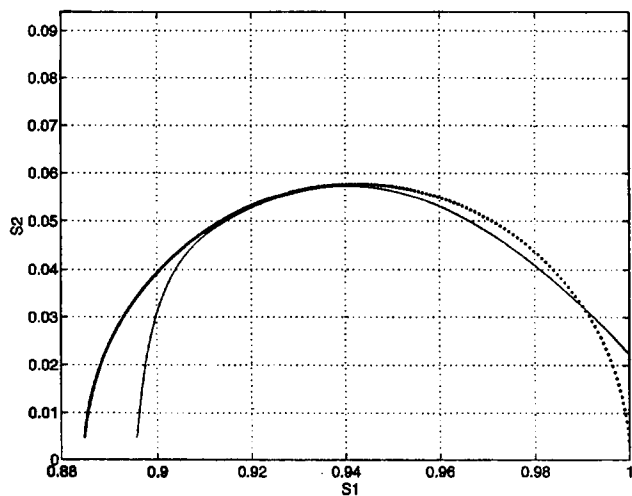


Fig.10.

Bibliographie .

- [1] Herzfeld, K., F., Rice, F., O., Dispersion and absorption of high frequency sound waves. Phys. Rev. (2) 31 [1928], 691 - 695.
- [2] Krönig, R., de L., On the theory of the dispersion of X - rays. J. Opt. Soc. Am. 12, [1926]. 547 - 557.
- [3] Kramers, M., A., La diffusion de la lumière par les atomes. Atti. Congr. Int. Fis. Como. 2. [1927]. 545 - 557.
- [4] Bode, M., W., Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design . 19 [1940] Bell. Syst. Tech. Jour. 421 - 454.
- [5] Roubine, E., Introduction à la théorie de la communication. Tome 1: signaux non aléatoires. Masson, 1970, Paris.
- [6] O' Donnell, M., Jaynes, E., T., Miller, J., G., Kramers - Krönig relationships between ultrasonic attenuation and phase velocity. 69, J. Acoust. Soc. Am. [1981], 696 - 701.
- [7] O' Donnell, M., Jaynes, E., T., Miller, J., G., General relationships between ultrasonic attenuation and dispersion. 63, J. Acoust. Soc. Am. [1978], 1935 - 1937.
- [8] Masson, W., P., Physical Acoustics. Vol II. Part. A. Properties of gases, liquids, and solutions. Academic Press, 1965, New York.
- [9] Voigt, W., Über innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle. Ann. d. Phys., 47, [1892], 671 - 693.
- [10] Thomson, W., Mathe. and Phys. Papers. 3, [1890], Cambridge University Press. 27.
- [11] Debye, P., Polar Molecules. Chemical Catalog. Co. 1926, New York.
- [12] Zener, C., Elasticity and Anelasticity of metals. The University Chicago Press, 1948, Chicago. Ed. Française. Elasticité et anélasticité des métaux, Dunod, 1955, Paris.
- [13] Cole, K., S., Cole, R., H., Dispersion and absorption in dielectrics. J. Chem. Phys. 9, [1941], 341 - 351.
- [14] Beyer, R., T., Letcher, S., V., Physical ultrasonics, 1969, Academic Press, New York.

- [15] Gazanhes, C., Garnier, J.- L., Holtzer, R., Etude de l'absorption et de la dispersion de vitesse d'une onde ultrasonore dans la zone de transition des bitumes. *Acoustica*, 21, [1969], 180 - 183.

CHAPITRE 3

LA DISPERSION DE RÉSONANCE.

1. Introduction.

Dans le chapitre II nous avons vu que la célérité de groupe cessait d'avoir une signification claire en milieu dissipatif. C'est pourquoi, dès 1914, Havelock [1] proposa une définition plus générale de la célérité de groupe: la vitesse de transport de l'énergie. En l'absence de dissipation, cette dernière s'identifie, bien entendu, à la célérité de groupe. Cette notion de vitesse de transport de l'énergie sera reprise par L. Brillouin [2] à propos de la propagation des ondes électromagnétiques dans les diélectriques dispersifs. Ces derniers sont, schématiquement, constitués d'atomes ou de molécules pouvant acquérir un moment dipolaire électrique oscillant sous l'action d'un champ électromagnétique, et se comportant comme des oscillateurs amortis. Ils possèdent des bandes de résonance à l'intérieur desquelles la dispersion de vitesse est considérable, car l'absorption est forte.

Nous appellerons ce type de dispersion, dispersion de résonance. On l'observe en acoustique, au cours de la propagation des ondes dans les milieux diphasiques liquide - bulles de gaz. Les bulles de gaz se comportent comme des oscillateurs mécaniques amortis, mis en vibration par les ondes qui parcourent le milieu.

Nous donnerons tout d'abord un aperçu sur la notion de vitesse de transport de l'énergie, puis nous décrirons deux approches qui permettent d'obtenir les variations de la célérité de phase et de l'absorption de l'onde excitatrice en fonction de la fréquence.

Dans la première approche on calcule l'indice de réfraction du milieu à partir des effets moyens des oscillateurs.

Dans la deuxième approche, on considère les oscillateurs comme des diffuseurs. Les ondes diffusées se combinent à l'onde incidente pour former une onde résultante dont la célérité de phase dépend du nombre, de l'amplitude et de la phase de chaque onde diffusée. Cette dernière approche permet de prendre en compte la répartition statistique des oscillateurs. Enfin dans les bandes de résonance, régions de forte absorption, nous calculons la vitesse de transport de l'énergie.

2. Vitesse de transport de l'énergie.

2.1. Définition

Le quotient du flux moyen d'énergie \bar{S} à la densité moyenne d'énergie \bar{W} est une quantité qui a pour dimension une vitesse; vitesse qui est celle avec laquelle l'énergie se propage à travers le système et que L. Brillouin [2] appellera vitesse de transport de l'énergie, définie par le quotient:

$$U_1 = \frac{\bar{S}}{\bar{W}} \quad (1)$$

2.2. Conservation de l'énergie.

Suivons les calculs de H. Levine [3] et considérons tout d'abord un milieu non dissipatif.

Soit donc l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (2)$$

que nous multiplions membre à membre par

$$\rho c^2 \frac{\partial y}{\partial t} = P \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Intégrons suivant la direction de propagation x entre x_1 et x_2 :

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho c^2 \frac{\partial y}{\partial t} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] dx =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho c^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho c^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right] dx = 0.$$

Soit encore:

$$-\frac{dE}{dt} = [S]_{x_1}^{x_2}.$$

Si
$$E = \int_{x_1}^{x_2} \bar{W} dx,$$

$$W = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho c^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = T + V , \quad (3)$$

est l'énergie totale, somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle V, et

$$S = - \rho c^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} , \quad (4)$$

est le flux d'énergie.

D'où l'équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

en l'absence de perte.

2.2.1. Milieu non dispersif.

Calculons la vitesse

$$U_1 = \frac{\bar{S}}{\bar{W}}$$

pour une onde progressive harmonique

$$y(x,t) = \text{Re} \left[A e^{i(kx - \omega t)} \right] \quad (6)$$

telle que $\omega = kc$ imposée par l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} .$$

Nous trouvons en utilisant les relations (3) et (4)

$$U_1 = \frac{\frac{1}{2} \omega k \rho c^2 |A|^2}{\frac{1}{4} \rho \omega^2 |A|^2 + \frac{1}{4} \rho c^2 k^2 |A|^2} = c \quad (7)$$

Donc la vitesse U_1 est égale à la célérité de phase ou, en d'autres termes, la vitesse de transport de l'énergie, la célérité de groupe et la célérité de phase sont égales, ce que nous avons déjà souligné au chapitre I.

2.2.2 Milieu dispersif sans absorption.

Dans ce cas il n'y a plus égalité entre la célérité de phase et la vitesse de transport de l'énergie.

Envisageons à nouveau le cas de la propagation guidée pour laquelle la dispersion est caractérisée par la relation

$$\omega = c_0 \sqrt{k^2 + h_n^2} , \quad (8)$$

où $h_n = \frac{\omega_{0n}}{c_0}$, ω_{0n} étant la pulsation de coupure du mode n.

L'expression (6) sera solution de l'équation:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - h_n^2 \right] y . \quad (9)$$

On tire de (8) la célérité de phase:

$$c_n = c_0 \sqrt{1 + \left(\frac{h_n}{k} \right)^2} . \quad (10)$$

Par ailleurs,

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \rho c^2 \omega k |A|^2 , \quad (11)$$

et

$$\bar{W} = \frac{1}{4} \rho \omega^2 |A|^2 + \frac{1}{4} \rho c^2 k^2 |A|^2 + \frac{1}{4} \rho c^2 h_n^2 |A|^2 , \quad (12)$$

il en résulte que:

$$U_1 = \frac{\bar{S}}{\bar{W}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{h_n}{k} \right)^2}} . \quad (13)$$

Donc

$$U_1 = U = \frac{d\omega}{dk} . \quad (14)$$

La célérité de groupe est égale à la vitesse de transport de l'énergie, elle est différente de la célérité de phase. Ce que nous avons déjà vu.

2.3. Cas des milieux dispersifs avec absorption.

Envisageons à nouveau une onde plane se propageant suivant la direction Ox . L'équation de conservation de l'énergie (5) prend alors la forme:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = -P, \quad (15)$$

où P représente la puissance dissipée. Pour déterminer sans ambiguïté chaque terme de l'égalité (15) il faut faire appel à des modèles détaillés décrivant le milieu de propagation et permettant d'évaluer les pertes explicitement. Grâce à ces modèles il est possible de mener les calculs jusqu'à leur fin, c'est-à-dire de donner une expression explicite pour la vitesse de transport de l'énergie.

A titre d'exemple nous allons décrire le modèle de la propagation acoustique en milieu diphasique liquide - bulles de gaz.

De tels milieux peuvent être assimilés à des ensembles d'oscillateurs mécaniques amortis et ils offrent beaucoup d'analogies avec les diélectriques [2], les plasmas [4], les frottements internes dans les solides [5].

3. Propagation en milieu diphasique et dispersion de résonance.

Etudions la propagation d'une onde acoustique dans un milieu diphasique eau - bulles d'air, en considérant les bulles comme des résonateurs amortis.

3.1. Propagation acoustique dans un nuage de bulles: indice de réfraction.

Nous supposons dans toute la suite que la longueur d'onde acoustique λ est très supérieure à la taille des bulles, de rayon a , de telle sorte que $\lambda \gg a$. La conséquence de cette hypothèse est qu'il est alors possible de décrire les oscillations de la bulle par une équation différentielle linéaire du second ordre:

$$m_e \ddot{V} + R_m \dot{V} + F_e (V - V_0) = S_0^2 (P_0 - P_{ac}), \quad (16)$$

équation analogue à celle qui régit le mouvement d'un système masse - ressort - amortisseur, avec ici:

m_e masse de fluide environnant entraîné ou "masse généralisée",

R_m coefficient de résistance au mouvement due au rayonnement;
résistance de rayonnement.

F_e coefficient d'élasticité du gaz contenu dans la bulle, dans le cas où l'on considère que les transferts de chaleur gaz - liquide sont nuls (hypothèse d'adiabaticité).

S_0 Surface de la bulle au repos.

L'équation (16) permet d'identifier les variations de volume des bulles:

$$\Delta V = - \frac{\frac{S_0^2 P_{ac}}{F_e} \left(\frac{\omega_R}{\omega} \right)^2}{\left(\frac{\omega_R}{\omega} \right)^2 - 1 + i\delta}, \quad (17)$$

où ω_R est la pulsation de résonance des bulles et δ un terme d'amortissement obtenu par l'analyse du comportement d'une bulle seule dans un milieu liquide infini.

En considérant la compressibilité adiabatique du milieu diphasique

$$\chi_{ad} = - \frac{1}{V_{tot}} \frac{dV_{tot}}{dP},$$

nous évaluons la célérité de phase:

$$\frac{1}{c^2} = \rho_{tot} \chi_{ad}. \quad (18)$$

Dans le cas où l'on a N bulles identiques de rayons a et en introduisant les valeurs de S_0 , F_e et ω_R il vient:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{(1 - \tau)^2}{c_0^2} + \frac{4\pi}{\omega^2} \frac{N a}{\left(\frac{\omega_R}{\omega} \right)^2 - 1 + i\delta}, \quad (19)$$

τ étant le taux de gaz défini par le rapport du volume total de gaz contenu dans les bulles, au volume total du milieu diphasique.

Si le taux de gaz est faible $1 - \tau \sim 1$ et (19) s'écrit:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} + \frac{4\pi}{\omega^2} \frac{N a}{\left(\frac{\omega_R}{\omega} \right)^2 - 1 + i\delta}. \quad (20)$$

Introduisons l'indice de réfraction $n = \frac{c_0}{c}$, (20) s'écrit:

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi N a c_0^2}{\left(\frac{\omega_R}{\omega}\right)^2 - 1 + i\delta}. \quad (21)$$

Cet indice de réfraction va nous servir dans la suite pour calculer la vitesse de transport de l'énergie.

3.2. Généralisation et diffusion multiple.

C'est une approche microscopique qui prend en compte le comportement de chaque bulle, ou diffuseur, pour décrire la propagation d'une onde acoustique dans un milieu où les bulles sont réparties aléatoirement et sont de tailles différentes.

3.2.1. L'équation de propagation en milieu diphasique.

Dans ces conditions on montre que l'onde acoustique (représentée par son amplitude complexe) est solution de l'équation d'onde de Helmholtz

$$\Delta \langle \psi \rangle + k^2 \langle \psi \rangle = 0, \quad (22)$$

où $\langle \psi \rangle$ appelé champ cohérent est la moyenne d'ensemble de ψ . Autrement dit, $\langle \psi \rangle$ vérifie l'équation d'onde dans un milieu fictif homogène avec la "constante" de propagation,

$$k^2 = k_0^2 + 4\pi G(r). \quad (23)$$

La vitesse de propagation dépend alors des propriétés des diffuseurs, de leur répartition et de l'espace r par l'intermédiaire de la fonction:

$$G(r) = \int \frac{a n(a)}{\left(\frac{\omega_R}{\omega}\right)^2 - 1 + i\delta} da, \quad (24)$$

où a est le rayon de la bulle, ω la pulsation de l'onde incidente, δ un terme d'amortissement et ω_R la pulsation de résonance de la bulle de rayon a .

$$\omega_R = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_0 \cdot a^2}}$$

Avec γ rapport des chaleurs volumiques du gaz contenu dans la bulle

liquide (ici de l'eau).

$G(r)$ étant complexe il en sera de même pour k .

Le nombre complexe $k = \beta - i\alpha$ correspond à une onde progressive qui se propage avec la vitesse de phase ω/β et s'atténue exponentiellement avec le coefficient d'amortissement α .

Donc

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\omega} \operatorname{Re} \{k\},$$

et

$$\alpha = -\operatorname{Im} \{k\}.$$

Les calculs numériques de c et α seront menés à partir de la relation (23) qui s'écrit encore

$$k^2 = k_0^2 + 4\pi \int \frac{a n(a)}{\left(\frac{\omega_R}{\omega}\right)^2 - 1 + i\delta} da, \quad (25)$$

où $n(a)$ représente la distribution de probabilité des rayons.

En se souvenant que $k / \omega = 1 / c$ et en utilisant un développement au premier ordre, (25) s'écrit:

$$c \approx c_0 \left[1 - \frac{2\pi}{k_0^2} \int \frac{a \left(\frac{\omega_R^2}{\omega^2} - 1 \right)}{\left(\frac{\omega_R^2}{\omega^2} - 1 \right)^2 + \delta^2} n(a) da \right]. \quad (26)$$

La distribution Gamma représente de façon précise la population de bulles, elle est donnée par:

$$n(a) = N_0 a^A \exp(-Ba),$$

où N_0 , A et B sont des constantes déterminées expérimentalement [6].

3.2.2. Etude expérimentale.

L'étude expérimentale [7] a été faite sur un banc de mesure représenté sur la fig. 1.

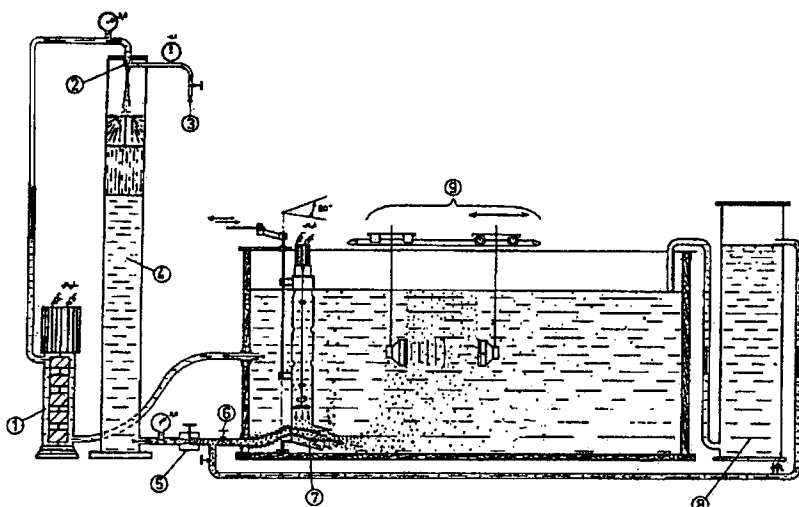


Fig.1. Générateur de bulles et cuve de mesure:

1. Pompe à rouets,
2. trombe à eau,
3. Admission d'air,
4. Ballon où se fait la dissolution de l'air sous 5 bars,
5. Tuyère de détente,
6. Vanne d'injection,
7. Distributeur à bulles,
8. Décanteur à bulles,
9. Banc de mesures acoustiques.

Le milieu diphasique est obtenu à l'aide d'un générateur industriel de microbulles. Il fonctionne par détente d'une eau saturée à travers une tuyère qui provoque la formation de fines bulles d'air. Ces bulles sont injectées dans la cuve de mesure. La densité de bulles est modifiée au moyen d'une vanne dont on peut régler l'ouverture, donc le taux d'air. On n'injecte alors dans la cuve qu'une certaine fraction de la population fournie par le générateur; l'autre fraction est recyclée après élimination des bulles par coalescence puis gravité dans un décanteur. Ce dispositif donne des milieux diphasiques à taux d'air variables de 0 à 10^{-4} pour des populations de bulles de rayon moyen inférieur à 60 μm .

L'étalonnage du milieu a pour but d'en mesurer ses principaux paramètres: nombre de bulles par mètre cube, rayon moyen, écart-type. Ces mesures sont effectuées par prélèvements à l'aide d'une éprouvette cylindrique ouverte à ses deux extrémités et que l'on plonge dans le milieu à étalonner.

On obture ensuite rapidement et simultanément le haut et le bas de l'éprouvette par des plaques de verre, puis on retire l'éprouvette du milieu. Après avoir attendu l'ascension de toutes les bulles et leur immobilisation sur la plaque supérieure on prend un cliché de celle-ci. La figure 2 montre un

cliché d'étalonnage.

L'analyse granulométrique des clichés photographiques permet de mesurer le rayon de chaque bulle, de tracer l'histogramme des tailles de bulles, de calculer le rayon, l'écart-type, le taux d'air et le nombre de bulles par unité de volume.

La figure 3 est un exemple de résultat obtenu.

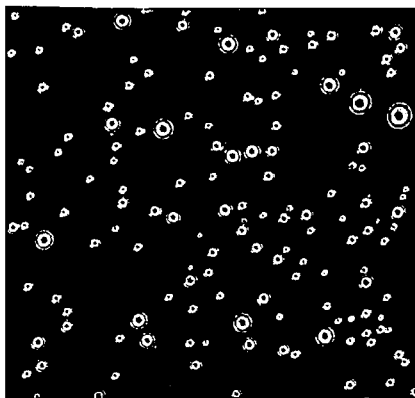


Fig 2. Exemple d'échantillon d'une population de bulles

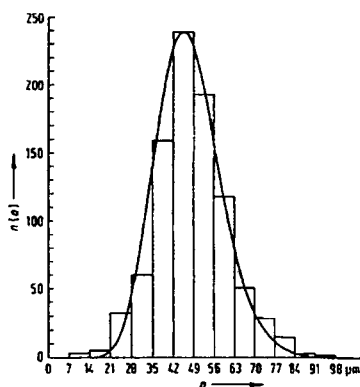


Fig3. Analyse granulométrique d'une population de bulles. Histogramme de tailles et adaptation à une distribution Gamma

Les mesures acoustiques portent essentiellement sur l'atténuation et la vitesse de propagation des ondes acoustiques se propageant dans le milieu diphasique. La gamme de fréquences choisie 15 kHz - 400 kHz couvre la zone des fréquences de résonance des bulles. Les mesures sont effectuées par transmission avec déplacement du récepteur. Un train d'ondes ultrasonores traverse le milieu pour être reçu par un récepteur placé en face de l'émetteur.

Les figures 4 et 5 correspondent à un milieu constitué de bulles de 50 μm de rayon moyen, contenant $60 \cdot 10^6$ bulles par m^3 ce qui correspond à un taux d'air de $5 \cdot 10^{-5}$.

La figure 4 montre la dispersion de vitesse dans la zone de résonance des bulles, la figure 5 représente l'atténuation correspondante. Ces résultats concernent un milieu à faible taux d'air. Pour des taux plus forts il est difficile d'obtenir des résultats exploitables en raison de l'atténuation considérable que subit l'onde acoustique dans la zone de résonance.

4. Analyse de la dispersion.

Remarquons que pour des fréquences largement inférieures ou supérieures à la fréquence de résonance des bulles, la vitesse du son décroît quand la fréquence augmente, la dispersion est normale et se fait sans absorption importante. Dans la zone intermédiaire autour de la fréquence de résonance, la dispersion est anormale, la vitesse croît avec la fréquence et l'absorption est très importante.

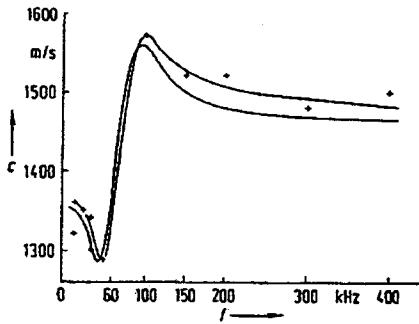


Fig.4. Courbes de variation de la célérité de phase c en fonction de la fréquence
 (—) célérité calculée
 (-+--++) célérité mesurée

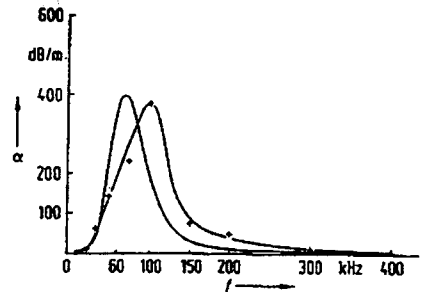


Fig.5. Courbes d'atténuation en fonction de la fréquence
 (—) atténuations calculées
 (-+--++) atténuations mesurées

4.1. La relation de dispersion.

Dans la bande d'absorption il est impossible de définir une célérité de groupe. En effet, sur la figure 6 nous avons tracé la relation de dispersion $\omega = f(R_e [k])$, correspondant à deux taux d'air différents $35 \cdot 10^{-6}$ et $7,5 \cdot 10^{-6}$.

Ces tracés permettent d'accéder à la célérité de groupe qui n'est autre que la pente de la tangente en un point de la relation de dispersion. Nous constatons que cette pente peut prendre des valeurs négatives et peut même devenir infinie en certains points. Cette situation a été signalée par L. Brillouin [2], la célérité de groupe perd toute signification et il convient maintenant de faire appel à la vitesse de transport de l'énergie.

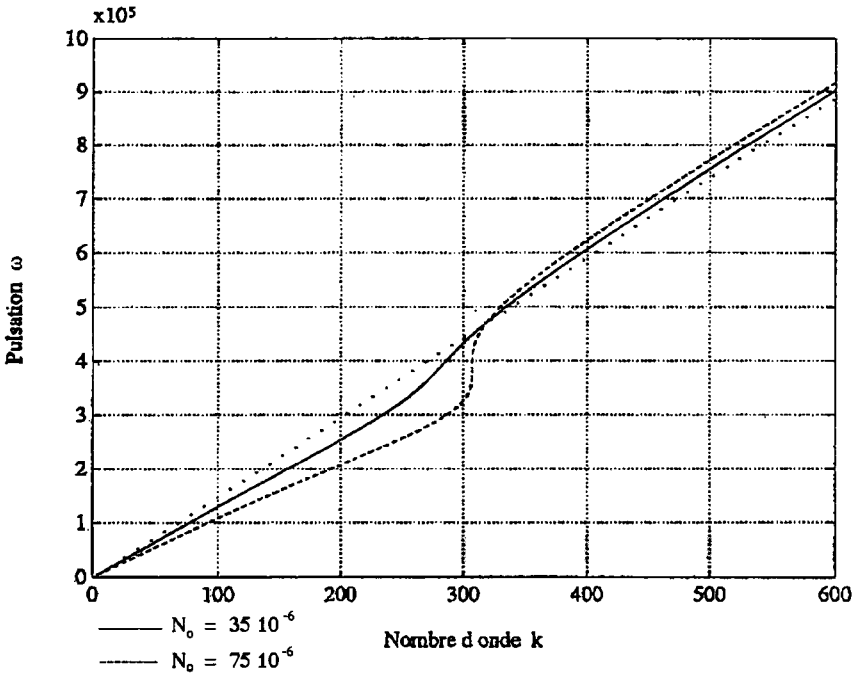


Fig.6.

4.2. Vitesse de transport de l'énergie.

Soit,

$$y(x,t) = A \exp \left\{ -i\omega \left(t - \frac{n(\omega)}{c_0} x \right) \right\}, \quad (27)$$

une solution de l'équation des ondes (22) où $n(\omega)$ est l'indice de réfraction du milieu tel que,

$$n = n_R + i n_I.$$

Ecrivons (27) sous une autre forme

$$y(x,t) = \text{Re}_e \left[s(x) e^{-i\omega t} \right] = \frac{1}{2} \left[s(x) e^{-i\omega t} + s^* e^{i\omega t} \right], \quad (28)$$

et calculons le flux moyen d'énergie \bar{S} . Suivons à nouveau Levine [3], et partons de la définition (4) qui donne, compte tenu de (28),

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \omega \rho c_0^2 \operatorname{Im} \left[s^* \frac{ds}{dx} \right].$$

Introduisons (27), nous obtenons:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho |A|^2 c_0 n_R. \quad (29)$$

Passons maintenant à l'énergie moyenne totale, elle est la somme de l'énergie acoustique moyenne dans le milieu homogène sans bulle et de l'énergie moyenne emmagasinée par les bulles, soit:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 |A|^2 + N \left(\frac{1}{2} \rho \bar{y}^2 + \frac{1}{2} \rho \omega_R^2 \bar{y}^2 \right). \quad (30)$$

Ou encore tout calcul fait:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 |A|^2 \left[1 + \frac{1}{k_R^2} \frac{2\pi Na(\omega^2 + \omega_R^2)}{(\omega_R^2 - \omega^2)^2 + \delta^2 \omega^2} \right], \quad (31)$$

avec l'hypothèse que le milieu contient N bulles identiques de rayon a.
Enfin,

$$U_1 = \frac{c_0 n_R}{\bar{W}} = \frac{c_0^2}{c(\omega)} \frac{1}{1 + \frac{1}{k_R^2} \frac{2\pi Na(\omega^2 - \omega_R^2)^2}{(\omega_R^2 - \omega^2)^2 + \delta^2 \omega^2}}. \quad (32)$$

La densité d'énergie (31) passe par un maximum pour la fréquence de résonance des bulles, la vitesse de transport de l'énergie décroît et passe par un minimum pour cette même fréquence. Illustrons ce comportement sur un exemple.

Envisageons un milieu contenant $35 \cdot 10^6$ bulles par mètre cube, toutes identiques et de rayon 55 μm . Le milieu "simplifié" correspond à celui de la figure 2.

La figure 7 représente les variations de la célérité de phase calculée à partir de (20), et la figure 8 donne l'allure des variations de la vitesse de transport de l'énergie (formule 32) en fonction de la fréquence. Cette vitesse passe par un minimum pour une fréquence égale à la fréquence de résonance des bulles, soit ici 75 kHz. La vitesse diminue quand le nombre de bulles par unité de volume augmente.

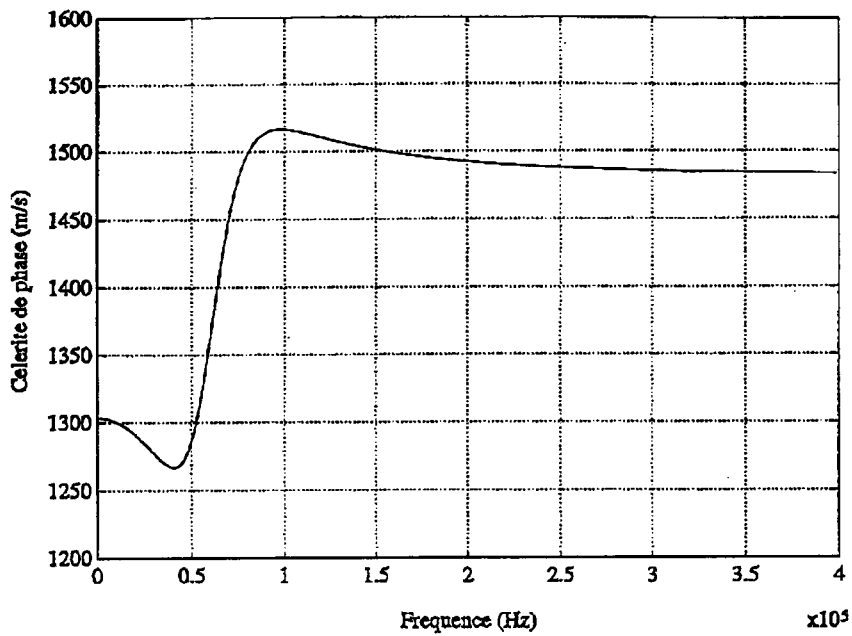


Fig.7.

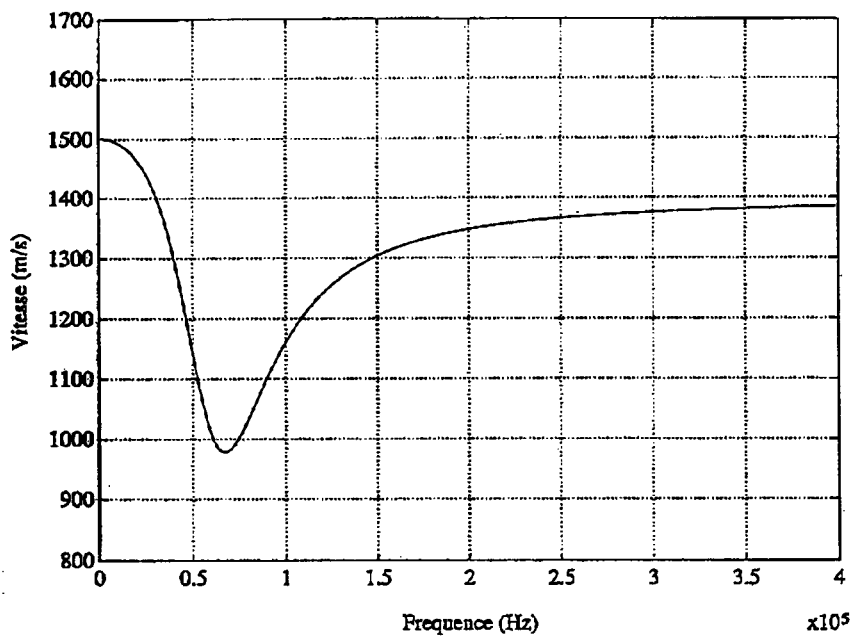


Fig.8.

Bibliographie.

- [1] Havelock, M., A., The propagation of disturbances in dispersive media. Stechert - Hafner Service Agency (1964) . New York
(Originellement publié en 1914 par Cambridge University Press).
- [2] Brillouin, L., Wave propagation and group velocity. Academic Press (1960) New York.
- [3] Levine, H., Unidirectional wave motions. North - Holland Publ. Co. (1978) Amsterdam.
- [4] Ginzburg, V., L., Propagation of electromagnetic waves in plasma. North - Holland. Publ. Co. (1964) Amsterdam.
- [5] Elices, M., Garcia - Moliner, F., Wave packet propagation and frequency - dependent internal friction. Physical Acoustics Volume 5. (1968) chap. 4. 163 - 219. Academic Press. New York.
- [6] Arzelies, P., Acoustique des bulles. Contribution à l'étude de la propagation en milieu diphasique liquide - bulles de gaz. Problème inverse: identification de paramètres décrivant le milieu. Thèse de Docteur Ingénieur. Université d'Aix - Marseille II (1981).
- [7] Gazanhes, C., Arzelies, P., Leandre, J., Propagation acoustique dans un milieu diphasique eau - bulles d'air. Application à la caractérisation d'un milieu diphasique par voie acoustique. Acustica 55, [1984] , 113 - 122.

CHAPITRE 4

DISPERSION DE COUPLAGE.

1. Introduction.

Etudions maintenant les phénomènes de couplage liés à la propagation dans des milieux à structures hétérogènes comme les matériaux composites ou les matériaux poreux.

Les matériaux composites sont constitués par une matrice englobant un matériau de renforcement. La matrice donne sa cohésion au composite et transmet les charges au matériau de renforcement.

Les milieux poreux sont également des matériaux composites présentant deux phases: l'une solide, correspondant à la matrice (ou squelette) constituée de grains à structure cristalline variée, l'autre fluide correspondant au gaz ou liquide interpénétrant les espaces entre grains. Dans le cas le plus courant, les vides intergranulaires sont remplis d'air ou d'eau.

Par la suite nous n'envisagerons que des milieux hétérogènes composés de deux milieux distincts; pour modéliser leurs propriétés mécaniques, il existe deux approches différentes. La première fait appel aux procédés d'homogénéisation et substitue au milieu réel un milieu homogène fictif. Cette approche ne rend pas compte des phénomènes observés expérimentalement aux hautes fréquences, en particulier la dispersion de vitesse et l'existence d'une deuxième onde.

La deuxième approche, plus heuristique, consiste à modéliser le milieu hétérogène par la superposition de deux milieux couplés, auxquels s'appliquent les principes des milieux continus. Il faut donc écrire les équations de propagation en y introduisant des forces de couplage.

Dans le cas de milieux à deux composants l'équation caractéristique admet deux solutions qui correspondent à deux modes de propagation appelés communément mode rapide et mode lent; ces modes sont dispersifs. Nous prendrons deux exemples de dispersion de couplage.

Le premier exemple est relatif à la dispersion de vitesse d'une onde ultrasonore se propageant parallèlement aux couches d'un milieu stratifié à deux composants. Nous montrerons que le modèle prévoit deux modes de propagation dont la vitesse décroît quand la fréquence augmente; c'est une dispersion normale ou géométrique.

Le deuxième exemple traite du cas des milieux poreux pour lesquels le modèle prévoit également deux modes de propagation, mais ici la vitesse croît avec la fréquence; c'est une dispersion anormale.

Nous terminerons ce chapitre en donnant un exemple de couplage entre modes de propagation.

2. Dispersion dans un composite stratifié.

Beaucoup d'études sont consacrées à la propagation des ondes acoustiques dans des milieux stratifiés, car de telles structures existent à l'état naturel mais sont surtout réalisées de façon artificielle pour la fabrication de matériaux composites. De tels milieux sont qualifiés de dispersifs car la célérité de phase des ondes acoustiques dépend de la fréquence.

De nombreuses théories ont été développées pour exprimer ces effets dispersifs. Dès 1960, L.M. Brekhovskikh [1] proposa une théorie dite classique dans laquelle le champ acoustique doit vérifier les conditions aux limites entre couches. Ces conditions, pour être remplies, conduisent à une équation de dispersion permettant de calculer la célérité de phase en fonction de la fréquence. Cette équation, assez difficile à manier, est peu propice à des calculs numériques simples, c'est pourquoi certains auteurs ont cherché à établir une équation plus simple donnant une relation explicite entre la célérité de phase et la fréquence; parmi ces derniers A. Bedford et M. Stern [2] puis G.A. Hegemier et al. [3] ont développé une théorie, dite du mélange, qui s'applique aux milieux stratifiés.

Nous allons brièvement exposer cette théorie qui met en lumière le rôle du couplage entre les couches d'un composite stratifié, (voir fig.1). La propagation des ondes ultrasonores se fait parallèlement aux couches alternées d'aluminium et de résine époxyde.

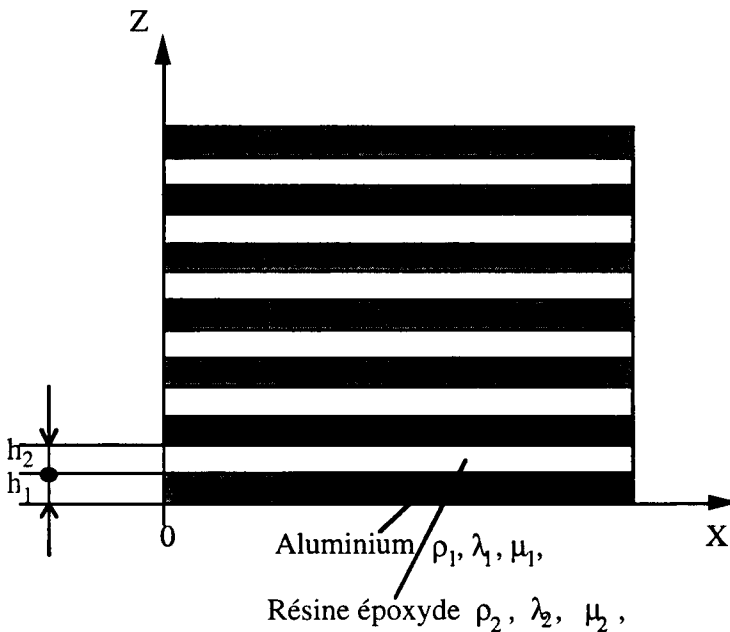
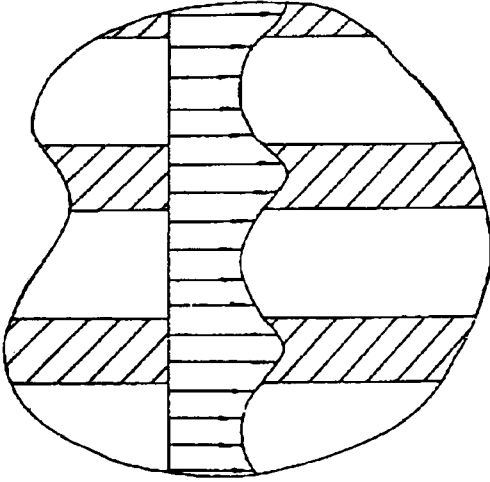


Fig. 1.

2.1. La théorie du mélange (couplage par la force).

Dans cette théorie proposée par A. Bedford et M. Stern [2], puis G.A. Hegemier et ses collaborateurs [3], on suppose que les constituants du composite ont des mouvements indépendants. C'est à travers le couplage entre les mouvements de chaque constituant qu'apparaissent les effets de la structure, sur les propriétés dynamiques du composite. Le couplage prend en compte des forces de liaison exprimées en fonction des constituants de la structure.



La fig. 2 montre un profil type de déplacement dans un composite. C'est la différence de vitesse de propagation parallèlement aux strates qui est à l'origine de la différence des déplacements moyens dans les constituants, différence qui crée une interaction forte entre ceux-ci; Pour le composite binaire les équations couplées du mouvement sont de la forme:

Fig.2.

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial x} - \rho_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = K (u_m - u_f), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_f}{\partial x} - \rho_f \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} = -K (u_m - u_f),$$

où les indices m et f indiquent la matrice et le matériau de renforcement, ρ_m et ρ_f sont les masses volumiques des constituants, σ_m et σ_f les contraintes moyennes, $u_m - u_f$ les déplacements relatifs, et K le coefficient de couplage, qui s'écrit:

$$K = \frac{3 \mu_1 \mu_2}{(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) (h_1 + h_2)^2} \quad (2)$$

Avec ces hypothèses, les solutions de l'équation caractéristique sont données par la relation explicite:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\left[\frac{vc_0^2}{\omega^2} - (c_1^2 + c_2^2) \right] \pm \sqrt{\left[\frac{vc_0^2}{\omega^2} - (c_1^2 + c_2^2) \right]^2 - 4 \left(1 - \frac{v}{\omega^2} \right) (c_1^2 c_2^2 - c_3^4)}}{2(c_3^4 - c_1^2 c_2^2)} \quad (3)$$

dont les différents paramètres sont définis de la manière suivante:

$$c_0^2 = (c_{11} + c_{22} + 2c_{12})/\rho,$$

$$c_1^2 = c_{11}/\rho_1^{(\rho)}, \quad c_2^2 = c_{22}/\rho_2^{(\rho)}, \quad c_3^4 = c_{12}^2/\rho_1^{(\rho)} \rho_2^{(\rho)},$$

$$\gamma = P \left(\rho/\rho_1^{(\rho)} \rho_2^{(\rho)} \right), \quad P = 3\mu_1 \mu_2 / (\mu_1 n_2 + \mu_2 n_1).$$

avec

$$\rho = \rho_1^{(\rho)} + \rho_2^{(\rho)},$$

$$\rho_\alpha^{(\rho)} = n_\alpha \rho_\alpha, \quad (\alpha=1,2),$$

$$n_\alpha = h_\alpha / (h_1 + h_2),$$

$$v = \gamma / (h_1 + h_2)^2,$$

$$c_{\alpha\alpha} = \left(n_\alpha E_\alpha - \frac{\lambda_\alpha^2}{E} \right), \quad c_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_\alpha \lambda_\beta}{E},$$

avec

$$\alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$E = \frac{E_1}{n_1} + \frac{E_2}{n_2},$$

$$E_\alpha = \lambda_\alpha + 2\mu_\alpha.$$

λ et μ coefficients de Lamé.

h_1 épaisseur de la couche d'aluminium

h_2 épaisseur de la couche de résine époxyde.

2.2. Etude de la dispersion.

Les solutions de l'équation de dispersion données par l'expression (3) font apparaître deux célérités de phase en fonction de la fréquence, un mode lent et un mode rapide correspondant respectivement aux signes - et +.

Le mode lent tend vers une limite,

$$c_0 = \left[(c_{11} + c_{22} + 2c_{12}) / \rho \right]^{1/2},$$

quand la fréquence tend vers zéro.

Au contraire le mode rapide possède une fréquence de coupure qui est donnée par:

$$\omega_c = \sqrt{\nu} = \sqrt{\gamma} / (h_1 + h_2),$$

$$\text{alors } 1/c^2 \rightarrow 0.$$

Cette fréquence de coupure du mode rapide est une conséquence du couplage entre les deux composants du matériau.

Quand le couplage est faible, ν est peu différent de zéro, les célérités tendent vers les valeurs:

$$\frac{1}{c_{\pm}^2} = \frac{(c_1^2 + c_2^2) \pm \sqrt{(c_1^2 - c_2^2)^2 + 4c_3^4}}{2(c_1^2 c_2^2 - c_3^4)} \quad (4)$$

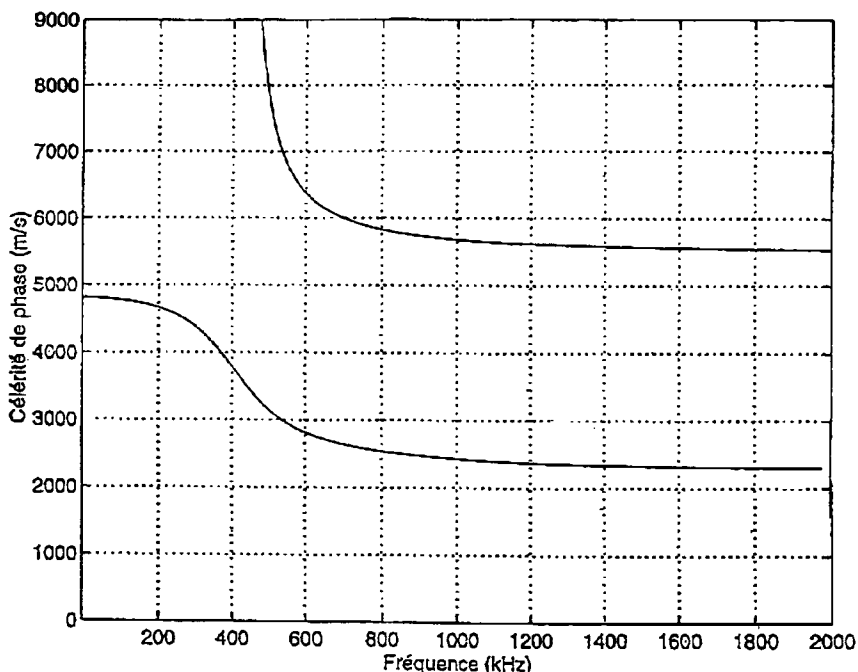


Fig.3.

Ces célérités sont indépendantes de la fréquence, et pour le mode rapide, la fréquence de coupure disparaît.

Enfin quand la fréquence augmente indéfiniment les célérités de mode tendent vers des valeurs limites données également par l'expression (4).

La fig.3 résume cette discussion et représente les variations en fonction de la fréquence, de la célérité de phase des deux modes dans le cas d'un stratifié aluminium - résine époxyde d'épaisseur $h_1 = h_2 = 1$ mm.

Pour les deux modes, la célérité décroît lorsque la fréquence augmente, comportement lié à la dispersion géométrique ou normale.

La fréquence de coupure du mode rapide est de 460 kHz. La célérité du mode lent tend vers une valeur limite égale à 4898 ms^{-1} quand la fréquence tend vers zéro; enfin quand la fréquence augmente indéfiniment les célérités de phase des deux modes tendent vers les valeurs limites $c_+ = 5657 \text{ ms}^{-1}$ et $c_- = 2598 \text{ ms}^{-1}$.

Les fig.4 et 5 représentent les courbes de dispersion et les célérités de groupe des modes lent et rapide. La célérité de groupe du mode lent possède un minimum.

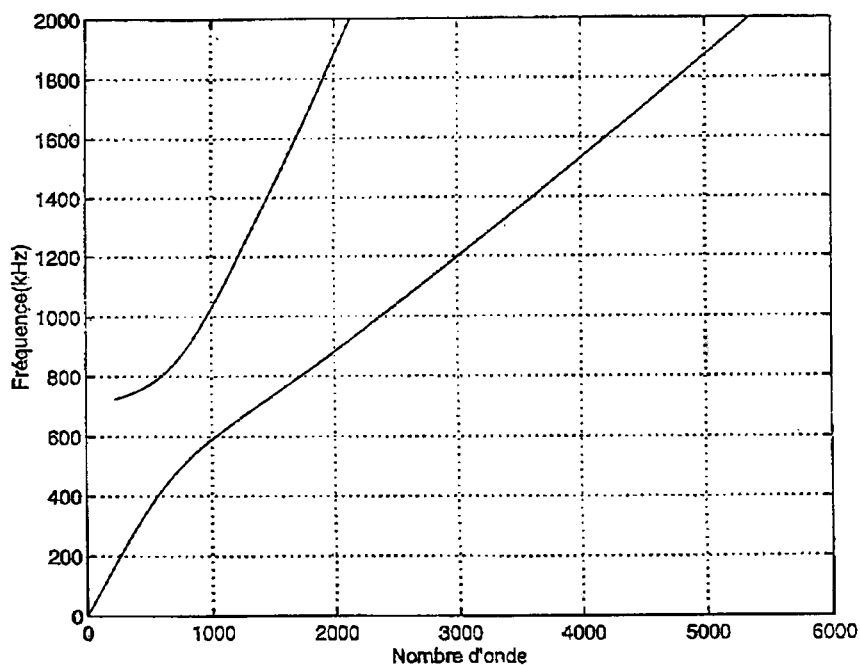


Fig. 4.

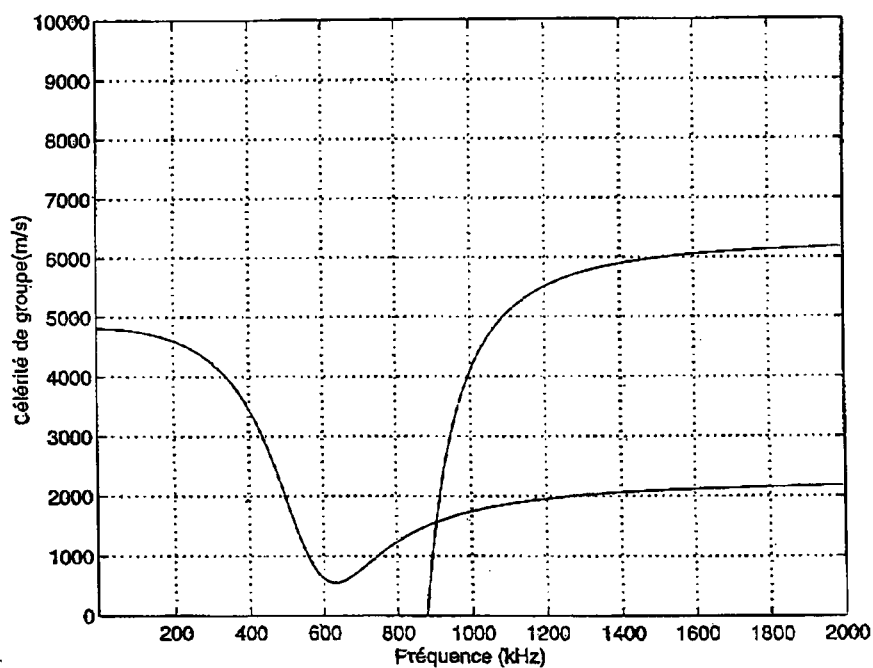


Fig. 5.

2.3. Résultats expérimentaux.

Nous présentons ici les résultats obtenus sur une structure constituée de plaques d'aluminium de 1 mm d'épaisseur, réunies entre elles par des couches de résine époxyde de même épaisseur [4]; ils correspondent à des mesures de célérité de phase dans la gamme de fréquences 200 kHz à 1,5 MHz.

Les fig.6 et 7 donnent deux exemples de signaux reçus après avoir traversé une épaisseur de 34 mm de la structure ($h_1 = 1\text{ mm}$, $h_2 = 1\text{ mm}$)

Sur la fig.6, le signal émis est un train d'ondes de deux périodes à fréquence fixe de 500 kHz. Cette fréquence étant inférieure à la fréquence de coupure du mode rapide, seul le mode lent est reçu.

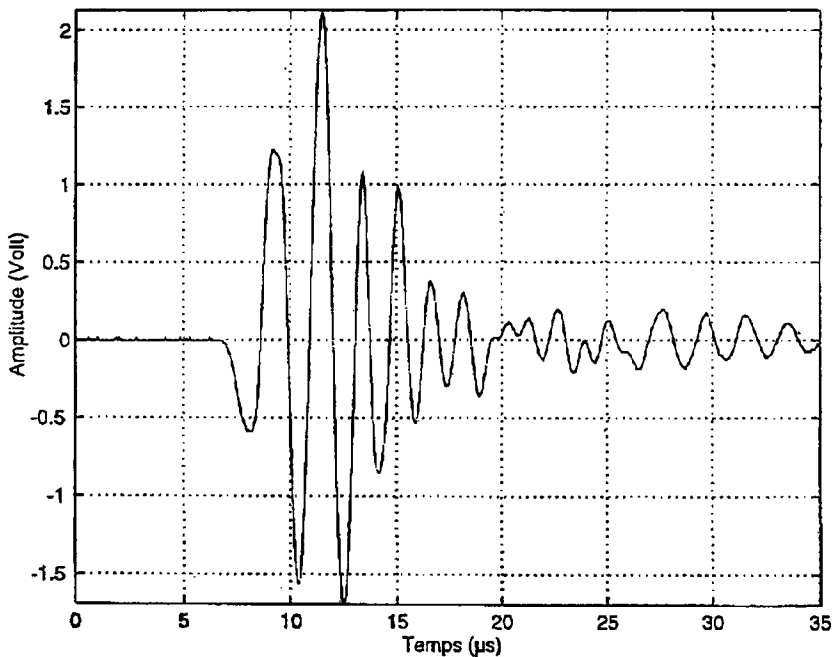


Fig.6.

Sur la fig.7, le signal émis est un train d'ondes de deux périodes à fréquence fixe de 1MHz supérieure à la fréquence de coupure du mode rapide, les deux modes sont bien reçus.

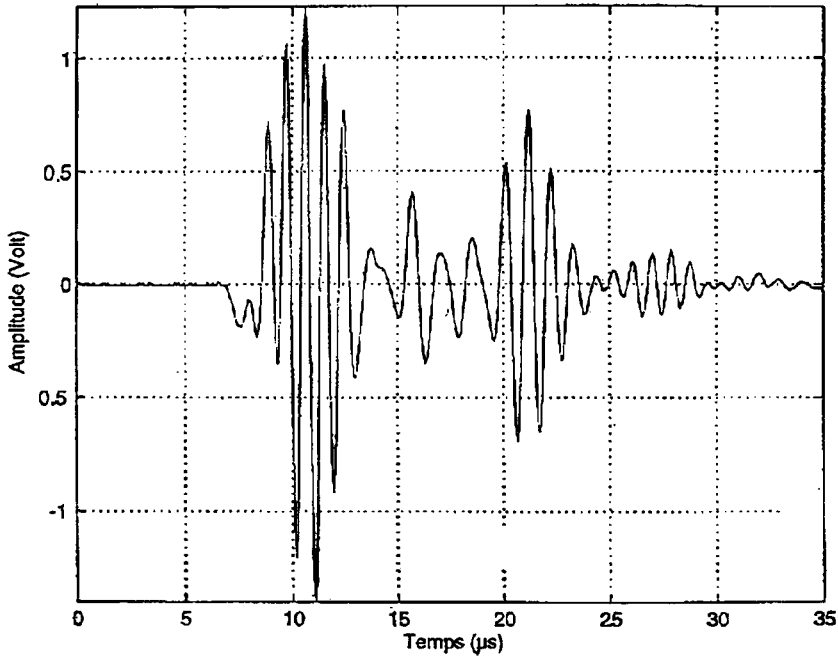


Fig.7.

Les points expérimentaux sont portés sur la fig.8 sur laquelle on constate que les propriétés dispersives de la structure sont situées entièrement dans la gamme de fréquences des mesures. Nous avons également tracé sur cette figure les célérités de phase calculées à partir de la théorie du mélange (courbes en pointillés) (formule 3) et de la théorie classique (courbes en trait plein). Pour le mode lent, les points expérimentaux sont bien situés sur la courbe donnée par la théorie classique. La fréquence de coupure du mode rapide prévue par la théorie classique à 0,8 MHz est bien marquée. Pour le mode rapide les résultats expérimentaux sont voisins de la courbe donnée par la théorie classique et se placent au-dessous des valeurs données par la théorie du mélange.

La théorie classique ajuste mieux les résultats expérimentaux que la théorie du mélange qui n'est valable que pour les longueurs d'onde grandes devant une période de la structure.

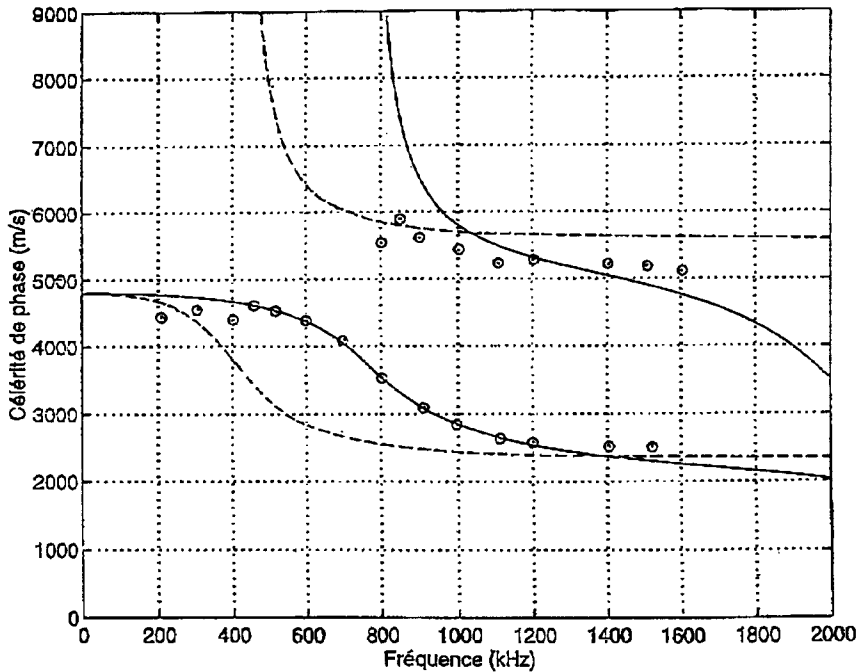


Fig.8.

3. Dispersion dans un milieu poreux.

Les milieux poreux sont des composites constitués, dans leur forme la plus simple, d'une matrice solide dont les vides sont remplis de fluide. Ils doivent permettre la libre circulation des fluides, et les propriétés acoustiques qui en dérivent, dispersion de vitesse et absorption, sont dues aux mouvements relatifs du fluide et du solide. Ils donnent un exemple de couplage par frottement, et la dispersion qui en résulte est semblable à celle que l'on observe pour les phénomènes de relaxation.

3.1. Description des milieux poreux.

3.1.1. Porosité. - Un milieu poreux est constitué d'éléments solides - particules pour les sédiments, matrice ou squelette pour les roches ou les matériaux frittés - entre lesquels les vides constituent l'espace poreux. On définit la porosité par le rapport:

$$\Phi = V_v / V_t \quad (5)$$

où V_v représente le volume des pores et V_t le volume total du milieu.

Par la suite, nous considérerons que le milieu poreux est saturé, que les phases fluide et solide sont continues et que la porosité est isotrope et uniforme.

3.1.2. Perméabilité. - De nombreux milieux poreux permettent la circulation des fluides. Or la loi de Darcy établit que la vitesse d'écoulement est directement proportionnelle au gradient de pression donnant naissance à l'écoulement. Si Q est le débit en volume qui s'écoule par seconde à travers une aire de section S d'un échantillon d'épaisseur L , la loi de Darcy indique que:

$$Q = \frac{K_p}{\eta} S \frac{\Delta p}{\Delta L}$$

dans le cas où l'écoulement est parallèle à L et où Δp est la différence de pression à travers un milieu poreux d'épaisseur ΔL ; η est la viscosité dynamique du fluide et K_p le coefficient de perméabilité ou perméabilité du milieu poreux. La perméabilité est homogène à une surface et son unité est le m^2 . On emploie également le Darcy (D) qui vaut $0,986923 \mu m^2$, mais on utilise souvent le millidarcy ($1mD \approx 10^{-15} m^2$).

La loi de Darcy n'est valable que dans les cas d'écoulement laminaire ou écoulement visqueux. Ce qui implique que:

- la résistance à l'écoulement est due à la seule force de viscosité
- le fluide est inerte vis-à-vis du milieu poreux, c'est-à-dire que les effets chimique, électrique, thermique sont absents.

3.2. Modèle de Biot (couplage visqueux).

3.2.1. Equations du mouvement.

La théorie de M.A. Biot [5], modélise la propagation d'une onde acoustique dans un milieu poreux, en se plaçant dans l'hypothèse où la longueur d'onde est grande devant les dimensions des pores. Le milieu poreux étant vu comme la superposition de deux milieux continus, on obtient deux équations couplées pour la propagation.

La première équation s'obtient à partir de la quantité de mouvement totale du fluide et du solide. En ne considérant qu'un mouvement parallèle à l'axe des x , elle s'écrit:

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_m + \rho_{12} u_f) = b \frac{\partial}{\partial t} (u_m - u_f) \quad (6)$$

La deuxième équation résulte des lois du mouvement relatif du fluide par rapport au solide, elle s'écrit:

$$\frac{\partial \sigma_f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t^2} (\rho_{12} u_m + \rho_{22} u_f) = -b \frac{\partial}{\partial t} (u_m - u_f) \quad (7)$$

σ_m et σ_f sont les contraintes dans la matrice et le fluide, u_m et u_f en sont les déplacements.

La masse volumique totale du milieu saturé est donnée par la relation:

$$\rho = \rho_m (1 - \Phi) + \rho_f \Phi,$$

qui permet de calculer les masses ρ_{11} , ρ_{22} et ρ_{12} .

Nous avons

$$\rho_{11} = \rho - 2 \rho_f \Phi + m \Phi^2,$$

$$\rho_{22} = m \Phi^2,$$

$$\rho_{12} = \rho_f \Phi - m \Phi^2.$$

Où m est un paramètre de couplage inertiel (égal à zéro si les canaux qui constituent le milieu sont tous parallèles).

Le coefficient de couplage b est relié à la perméabilité K_p par la relation

$$b = \frac{\eta}{K_p} \Phi^2,$$

où η est la viscosité du fluide.

Le deuxième membre des équations 6 et 7 représente la force de frottement exercée par le fluide sur le solide dans la direction du mouvement.

On utilise plus généralement les équations 6 et 7 sous la forme donnée par R.D. Stoll [6]:

$$\Delta (H e - C \zeta) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho e - \rho_f \zeta), \quad (8)$$

$$\Delta (C e - M \zeta) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_f e - m \zeta) - \frac{\eta}{K_p} F(\kappa) \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (9)$$

avec:

e : dilatation volumique de la matrice du matériau

ζ : augmentation locale de teneur en fluide

ρ_f : masse volumique du fluide

ρ_r : masse volumique du solide constituant la matrice

ρ : masse volumique totale du milieu saturé, donnée par la relation:

$$\rho = \rho_r (1 - \Phi) + \rho_f \Phi$$

Dans l'équation (9), m représente le couplage inertiel et le rapport $\eta F(\kappa) / K_p$ représente le couplage visqueux.

H , C et M sont les modules élastiques de Biot.

3.2.2. Modules élastiques.

Ils s'expriment à partir des modules de rigidité K_r du matériau constituant la matrice, K_f du fluide et K_b de la matrice, μ étant le module de cisaillement classique du matériau constituant la matrice. Pour déterminer et comprendre la signification physique de ces coefficients, Biot a proposé deux types d'expériences "fictives" à partir desquelles il serait possible d'exprimer H , C et M en fonction des modules K_r , K_f et K_b .

La première expérience correspond à un milieu drainé pour lequel la pression p_f du fluide est nulle.

La deuxième correspond à un milieu non drainé pour lequel la teneur en fluide ζ est constante.

En s'inspirant de ces expériences "fictives", R.D. Stoll [6] donne les expressions suivantes pour les coefficients de Biot:

$$\begin{aligned} H &= \frac{(K_r - K_b)^2}{D - K_b} + K_b + \frac{4}{3}\mu, \\ C &= \frac{K_r(K_r - K_b)}{D - K_b}, \\ M &= \frac{K_r^2}{D - K_b}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$D = K_r \left[1 + \Phi \left(\frac{K_r}{K_f} - 1 \right) \right].$$

Généralement K_b n'est pas connu et devra être considéré comme un paramètre ajustable.

Quand à $H - \frac{4}{3}\mu$, il représente le module de rigidité du milieu poreux saturé.

3.3. Propagation des ondes.

3.3.1. Equation de dispersion.

Pour obtenir l'équation de dispersion considérons pour e et ζ des solutions de la forme:

$$\begin{aligned} e &= A_1 \exp [i (\omega t - kx)] \\ \zeta &= A_2 \exp [i (\omega t - kx)] \end{aligned} \quad (11)$$

où $k = k_R + i k_I$.

En portant les relations (11) dans les équations (8) et (9) , nous obtenons un système de 2 équations à deux inconnues A_1 et A_2 qui admet des solutions non triviales si le déterminant des coefficients est nul, soit ici:

$$\begin{vmatrix} Hk_\ell^2 - \rho \omega^2 & \rho_f \omega^2 - Ck_\ell^2 \\ Ck_\ell^2 - \rho_f \omega^2 & m\omega^2 - Mk_\ell^2 - i \frac{\omega \eta F}{K_p} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

où k_ℓ représente le nombre d'onde longitudinal.

Le développement du déterminant (12) donne une équation bicarrée en k_ℓ dont la résolution conduit à deux solutions ayant un sens physique, donc à deux célérités de phase déterminées par $V_p = \omega / k_R$ pour les ondes longitudinales, avec une atténuation donnée par $A_m = - k_I$.

Ces deux célérités dépendent de la fréquence et correspondent l'une à l'onde de première espèce (ou onde rapide), l'autre à l'onde de deuxième espèce (ou onde lente) de Biot. Comme pour les milieux stratifiés, le couplage donne naissance à deux ondes longitudinales.

3.3.2. Résolution numérique.

La résolution du déterminant (12) permet d'obtenir, après développement, une équation de dispersion bicarrée. L'expression des solutions appartenant à cette équation fait apparaître l'existence d'une onde de compression rapide (notée V_{p1}) et d'une onde de compression lente (notée V_{p2}), correspondant respectivement aux signes + et - du discriminant, soit:

$$V_{p1} = \frac{\omega}{k_{1R}^+} \quad \text{et} \quad V_{p2} = \left(\frac{\omega}{k_{1R}^-} \right)$$

ces deux célérités variant de c_0 (célérité à fréquence nulle) à c_∞ (célérité à fréquence infinie).

Dans ces notations, k_R représente la partie réelle du nombre d'onde.

La fig.9 donne l'allure des variations de la célérité de l'onde rapide en fonction de la fréquence. Cette courbe a été calculée avec les paramètres publiés par A. Turgut [7], ceux -ci correspondent à une roche poreuse dont la nature n'est pas spécifiée.

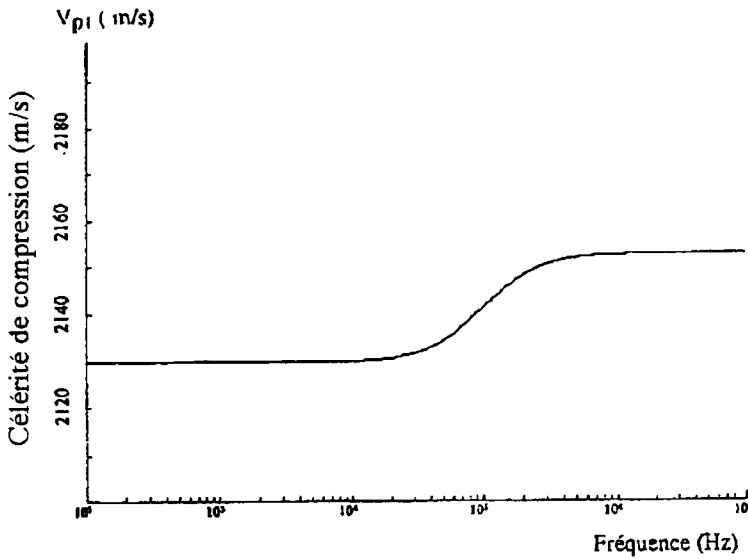


Fig. 9

L'onde rapide correspond au cas où il y a correspondance de phase entre les mouvements du fluide et de la matrice, l'onde lente très atténuée correspond au cas où il y a opposition de phase.

La dispersion de vitesse est caractéristique d'une relaxation. La valeur de la perméabilité K_p fixe la position de la zone de dispersion sur l'axe des fréquences. Le point d'inflexion de la courbe des célérités correspond à une fréquence caractéristique du milieu,

$$f_c = \frac{\Phi \eta}{2\pi K_p \rho_f}$$

dont la valeur marque l'égalité entre le couplage inertiel et le couplage visqueux.

3.4. Résultats expérimentaux.

Les mesures ont porté sur trois échantillons de roches sédimentaires du Midi de la France [8]: ce sont successivement le calcaire de Castillon (C), le calcaire de Montpellier (M) et le calcaire du Lubéron (L).

Les courbes expérimentales (figurées par des points) et les courbes théoriques (en trait plein) sont tracées sur la fig.10. Elles correspondent à l'onde rapide. Nous avons ici affaire à une dispersion anormale et nous observons que la célérité augmente avec la fréquence d'une valeur c_0 (célérité à fréquence nulle) à une valeur c_∞ (célérité à fréquence infinie). Il n'y a pas de fréquence de coupure.

Ces trois échantillons accusent dans l'ensemble une forte dispersion de vitesse, bien que celle-ci soit moins importante pour le dernier échantillon noté (L): les différences d'amplitude sont respectivement $\Delta V_p(C) = 209$ m/s, $\Delta V_p(M) = 261$ m/s, $\Delta V_p(L) = 119$ m/s. A noter que le ΔV_p reflète le "degré de consolidation" de la roche: plus ΔV_p est petit, plus la roche est consolidée; la même remarque est répercutée sur les vitesses de cisaillement, à savoir:

$$\Delta V_s(C) = 126 \text{ m/s}, \Delta V_s(M) = 130 \text{ m/s}, \Delta V_s(L) = 67 \text{ m/s}.$$

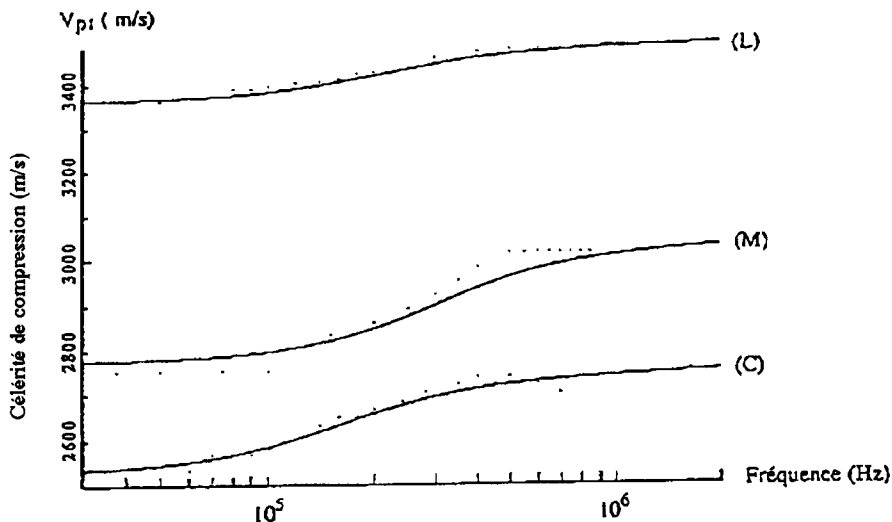


Fig. 10

L'onde lente n'a pu être observée dans aucune des roches utilisées, vraisemblablement à cause de l'atténuation de ce mode compte tenu des longueurs d'onde et des tailles de grains mis en jeu. Pour la percevoir, il faudrait modifier la taille des pores afin que les mouvements moyens du fluide par rapport à la matrice soient possibles. De plus, si en haute fréquence ces mouvements moyens sont facilités, ils entraînent une dissipation d'énergie importante qui atténue fortement l'onde lente.

L'onde lente a été mise en évidence par Plona [9],[10] et ses collaborateurs, dans des milieux poreux artificiels réalisés à partir de billes de verre frittées.

4. Ondes guidées et couplage de modes .

Dans les structures stratifiées, pour certaines épaisseurs h_1 et h_2 des strates il arrive que les courbes de dispersion de deux modes se rapprochent sans se couper, en ce point pour une fréquence donnée, ils ont la même célérité de phase. Mis en évidence lors de l'étude des lignes à retard acoustiques, le couplage a été essentiellement étudié en électromagnétisme pour les guides d'onde.

A. H. Meitzler [11] a, semble-t-il, observé pour la première fois en 1961 un couplage entre le mode longitudinal et le mode de flexion lors de la propagation d'une impulsion dans un fil, couplage qu'il attribue à des imperfections dans le guide. Le couplage se produit pour une fréquence dite "critique" pour laquelle les courbes de dispersion des deux modes se coupent, ils ont alors la même célérité de phase. Dans ces conditions, un train d'ondes à fréquence fixe, dont la valeur est égale à la fréquence critique, subit une distortion caractéristique associée à ce couplage.

En 1971, G. W. Farnell et E. L. Adler [12] mettent en évidence un autre type de couplage de modes dans une plaque composite constituée d'une couche d'or, d'épaisseur h , déposée sur un substrat de quartz d'épaisseur h' .

4.1. Analyse de la dispersion pour des couches alternées solide - fluide.

4.1.1. La relation de dispersion.

La théorie de la propagation d'ondes ultrasonores parallèlement aux strates d'un milieu composé de couches alternées solide - fluide a été développée par L. M. Brekhovskikh [1]. Dans ce cas, l'onde longitudinale en moyenne vérifie les conditions de continuité, pour les contraintes et les déformations, à la limite de séparation des différentes couches, conditions qui conduisent à la relation de dispersion suivante:

$$\begin{aligned} \mu \bar{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha} h_2}{2} \left(4 a^2 \alpha \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha h_1}{2} + \gamma^2 \operatorname{tg} \frac{\beta h_1}{2} \right) \\ + \bar{\rho} \omega^2 \alpha \left(\gamma + 2a^2 \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha h_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta h_1}{2} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

dans laquelle:

$$\alpha = \omega \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right)^{1/2}, \quad \beta = \omega \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right)^{1/2},$$

$$\bar{\alpha} = \omega \left(\frac{1}{\bar{v}^2} - \frac{1}{c^2} \right)^{1/2}, \quad \gamma = \omega^2 \left(\frac{1}{b^2} - 2 \frac{1}{c^2} \right).$$

avec:

v = célérité des ondes longitudinales,

b = célérité des ondes transversales,

μ = coefficient de Lamé,

ρ = masse volumique,

h_1 = épaisseur des couches solides,

h_2 = épaisseur des couches fluides.

Les paramètres surlignés correspondent aux couches liquides.

Cette relation permet de calculer la célérité de phase en fonction de la fréquence des modes symétriques, les modes antisymétriques étant nuls en moyenne.

4.1.2. Application à une structure eau - aluminium

Nous avons appliqué l'équation (13) au cas d'un milieu composé de plaques d'aluminium d'épaisseur constante, par exemple 2mm, séparées par des lames d'eau dont on peut faire varier l'épaisseur. Les fig. 11 à 13 montrent les courbes de dispersion obtenues pour trois épaisseurs de la lame d'eau, à savoir 1,4 , 1 et 0,7 mm.

Observons que les courbes en pointillés restent fixes, elles correspondent à des modes symétriques se propageant dans les plaques d'aluminium. Les courbes en trait plein au contraire se déplacent vers la droite quand l'épaisseur des lames d'eau diminue.

L'allure du premier mode symétrique est voisine de celle du premier mode symétrique de plaque pour l'aluminium, seules les valeurs des célérités sont abaissées. D'une manière générale quand la fréquence augmente les célérités de phase correspondantes tendent vers la valeur 1500 ms^{-1} de la célérité de phase des ondes dans l'eau.

Remarquons également que le premier mode symétrique se rapproche du premier mode symétrique se propageant dans les plaques d'aluminium. Sur la figure 13, ces deux modes sont très proches dans une bande de fréquences comprise entre 0,8 et 1,1 MHz où leur célérité de phase est voisine et favorise leur couplage.

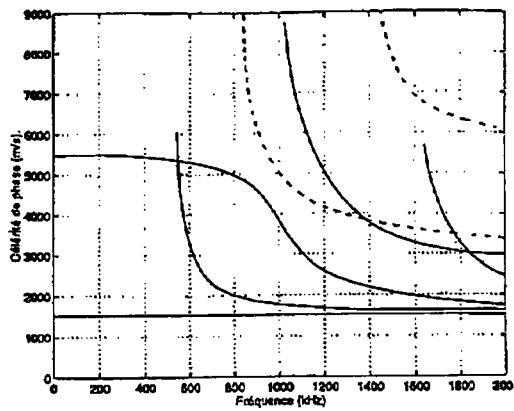


Fig. 11.

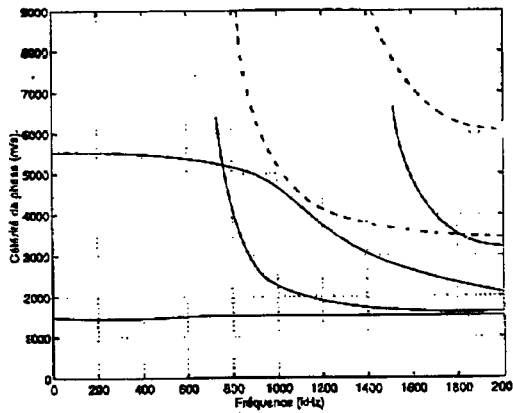


Fig. 12.

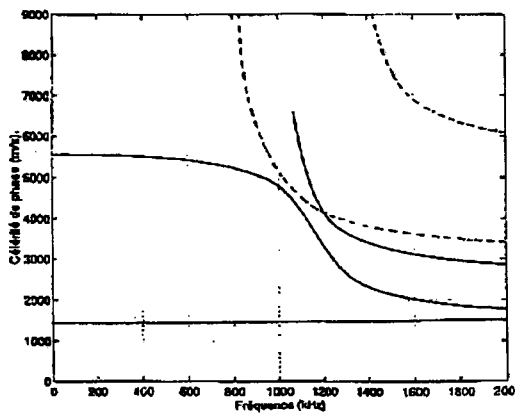


Fig. 13.

4.2. Résultats expérimentaux.

La transmission d'une onde ultrasonore se propageant parallèlement aux strates d'une structure constituée de lames d'aluminium séparées par des couches d'eau d'égale épaisseur permet de mettre en évidence la zone de couplage déterminée sur la fig.13.

Les signaux émis sont des trains d'ondes de quatre périodes à fréquence fixe entre 0,8 et 1,4 MHz. Les figures 14 et 15 montrent les signaux transmis par les deux structures pour des fréquences de 0,8 , 0,9, 1 et 1,4 MHz.

Sur la fig. 14 l'épaisseur de la lame d'eau est de 1,4 mm, elle est de 0,7 mm sur la fig.15.

Tout d'abord dans les deux cas nous noterons l'arrivée bien distincte de deux trains d'ondes. Le premier fortement dispersé correspond au premier mode symétrique des figures 11 et 13. Le second peu dispersé s'est propagé dans les lames d'eau. Il correspond à l'horizontale $c = 1500 \text{ ms}^{-1}$ des figures 11 à 13.

Ces deux signaux ont été obtenus par Schoenberg [13] qui les a appelés ondes lente et rapide. Nous savons que ce phénomène apparaît dès qu'il y a propagation dans des milieux couplés, par exemple les milieux poreux et les structures stratifiées du type aluminium - résine époxyde.

Revenons aux structures eau - aluminium. Nous constatons que le signal rapide est moins bien excité dans la première structure, en effet l'épaisseur de la lame d'eau étant de 1,4 mm, il y a moins de lames d'aluminium dans le faisceau ultrasonore. Le phénomène de couplage de modes n'apparaît pas, les deux premiers modes symétriques n'étant pas voisins comme indiqué sur la fig.11.

Examinons maintenant la fig.15. Ici l'épaisseur de la lame d'eau est de 0,7 mm. Les deux ondes sont bien excitées, elles apparaissent nettement (fig.15a) pour la fréquence de 0,8 MHz. Pour 0,9 MHz (fig.15b) il apparaît des battements, l'onde rapide est suivie de deux paquets d'ondes bien réguliers. Pour 1MHz (fig.15c) les battements sont bien visibles: on distingue 3 paquets d'ondes. Pour 1,4 MHz (fig.15d) le phénomène a disparu, seules les ondes lente et rapide, quoique très atténuées, subsistent.

Les paquets d'ondes sont dus au couplage entre les deux premiers modes symétriques de la structure.

Il apparaît un phénomène de battements qui se traduit par une variation périodique de l'amplitude du signal reçu.

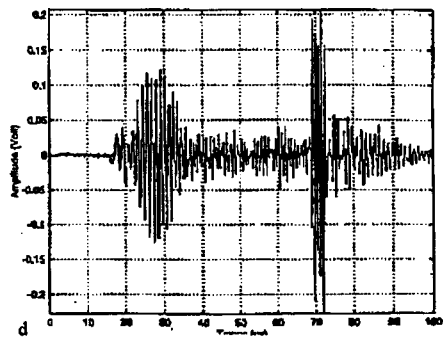
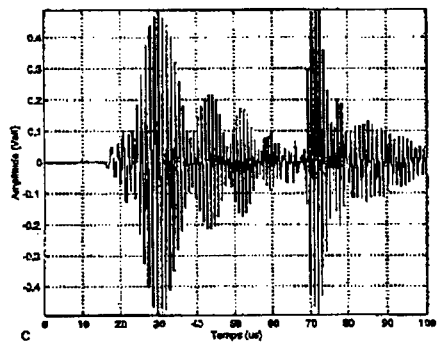
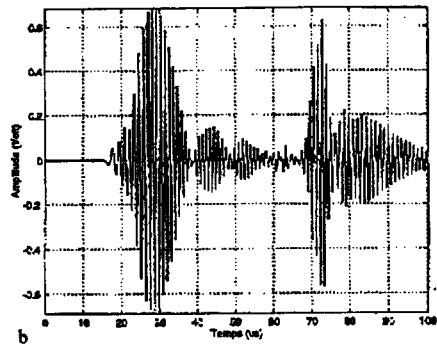
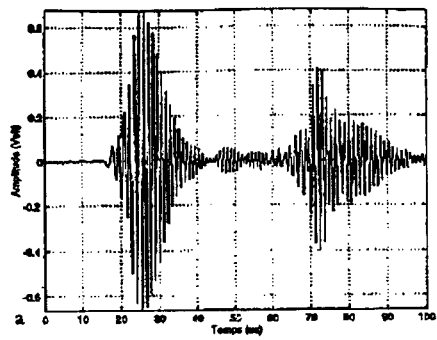
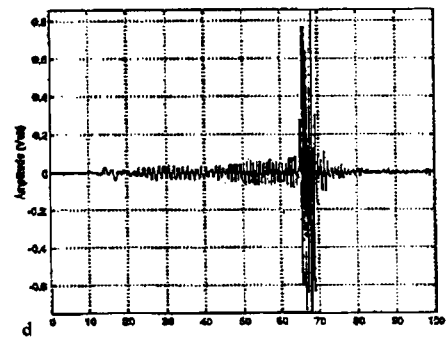
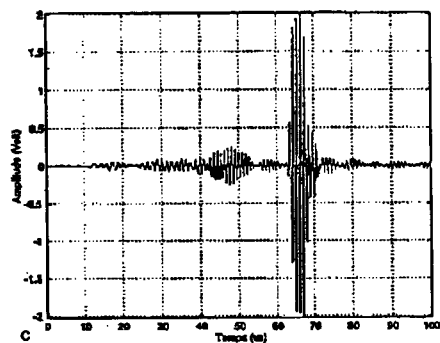
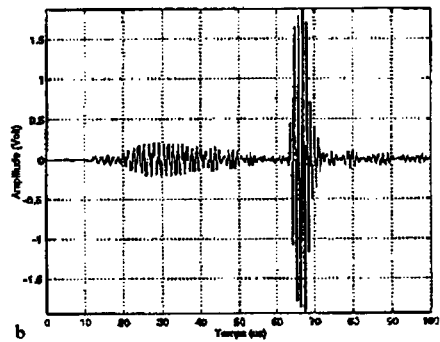
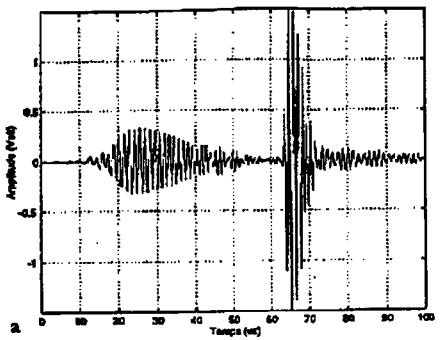


Fig. 14.

Fig. 15.

4.3. Analyse du couplage.

4.3.1. Approche générale du couplage.

Sans entrer dans les détails des calculs que le lecteur trouvera dans les références [14] et [15], nous donnons ici les principaux résultats concernant notre étude [16]. On montre que deux ondes harmoniques, d'amplitude a_1 et a_2 , faiblement couplées sont solutions de l'équation de couplage:

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{dx} &= -j \beta_1 a_1 + c a_2 \\ \frac{da_2}{dx} &= -j \beta_2 a_2 + c a_1\end{aligned}\tag{14}$$

β_1 et β_2 étant les nombres d'onde correspondants et c un coefficient de couplage que l'on suppose uniforme suivant la direction x de propagation. On suppose également que cette propagation s'effectue sans perte.

Dans ces conditions l'énergie est transférée périodiquement d'un mode à l'autre de telle sorte que l'amplitude du signal est donnée par la relation:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{4c^2} + 1}} \sin \left[\left(\sqrt{\frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{4c^2} + 1} \right) cx \right].\tag{15}$$

Le transfert d'énergie est maximal quand:

$$\left(\sqrt{\frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{4c^2} + 1} \right) cx = \frac{\pi}{2}.\tag{16}$$

4.3.2. Ajustement à l'expérience

Revenons à la fig.15c qui illustre bien les battements se produisant entre les deux premiers modes symétriques de la structure. La fig.16 présente la zone utile du signal que nous avons limitée entre 0 et 60 μs (10 μs et 60 μs sur la figure). La deuxième arrivée relative à l'onde lente n'est pas concernée par le couplage.

La fig.17 donne les courbes de dispersion des deux premiers modes symétriques, pour des raisons de clarté nous n'avons pas fait figurer les autres modes.

A l'examen de cette figure il apparaît une zone de couplage située entre 0,8 et 1,1 MHz.

La fréquence instantanée, obtenue à partir de la dérivée de la phase du signal analytique du signal transmis par la structure, a été tracée sur la fig.18. Elle montre l'évolution de la fréquence en fonction du temps dans la zone de couplage. Calculons les variations:

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\pi f \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) \quad (17)$$

du nombre d'onde en fonction de la fréquence à partir des courbes de la fig.17, puis en fonction du temps, à partir des variations temporelles de la fréquence instantanée. Nous obtenons la courbe de la fig.19 qui montre les variations de $\Delta\beta$ en fonction du temps

Il n'y a plus qu'à porter les valeurs de ces variations dans la formule (15) pour obtenir l'amplitude du signal transmis en fonction du temps. Ce qui est réalisé sur la fig.20.

Celle - ci a été obtenue en prenant $cx = \pi/2$, valeur qui correspond au premier maximum de l'amplitude, pour lequel $\Delta\beta$ est minimal, théoriquement égal à zéro. Ce coefficient a pour dimension l'inverse d'une longueur. Nous avons ensuite estimé le coefficient de couplage c pris égal à 7 m^{-1} , afin que le nombre de maxima coïncide avec celui du signal expérimental.

La fig.21 représente l'enveloppe du signal expérimental et nous constatons, en comparant les courbes des fig.20 et 21, le bon accord entre les résultats expérimentaux et le modèle théorique.

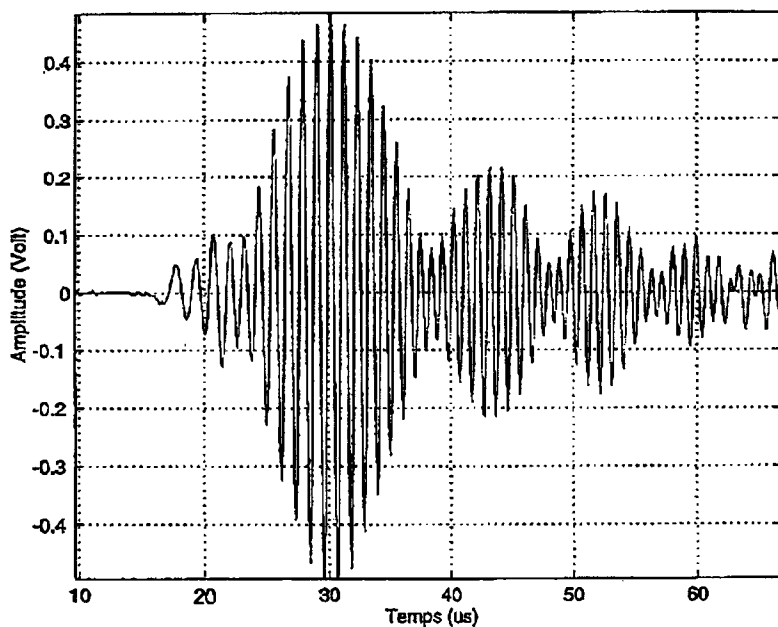


Fig.16.

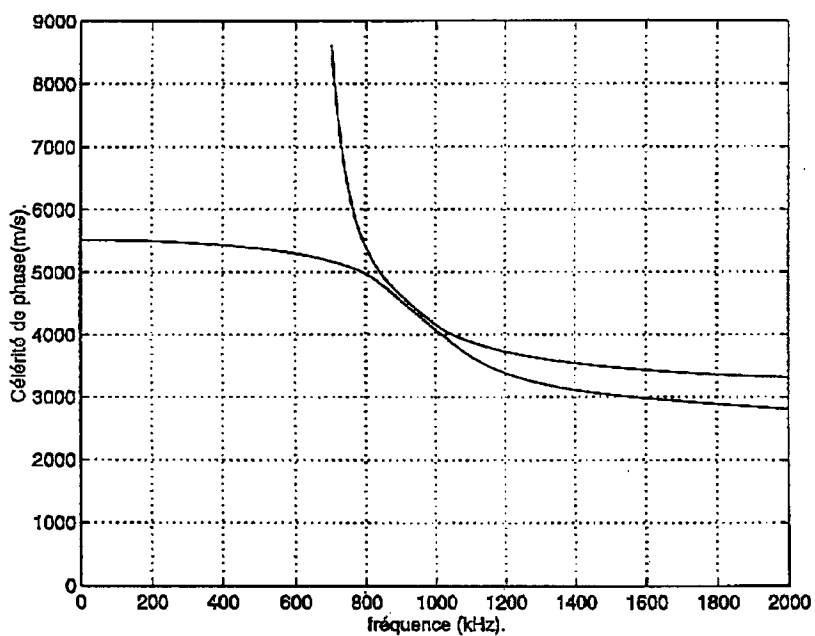


Fig.17.

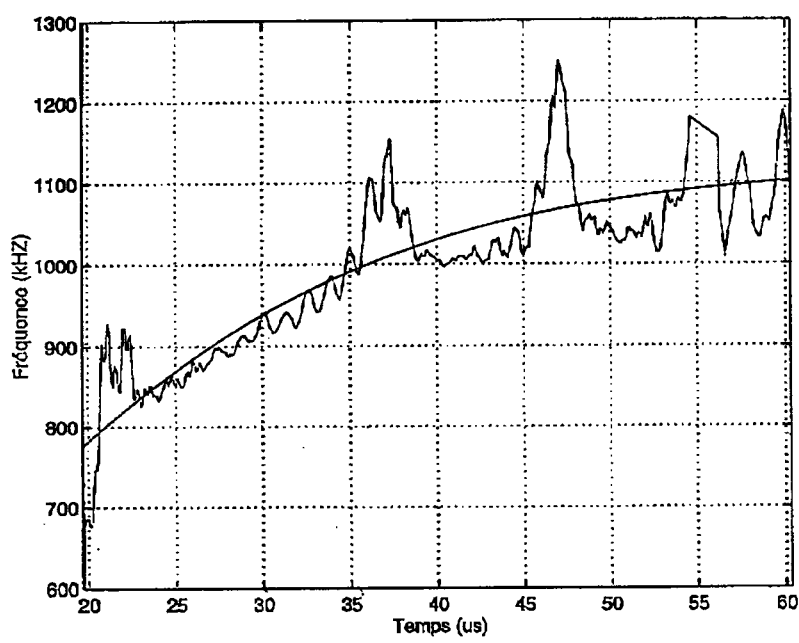


Fig.18.

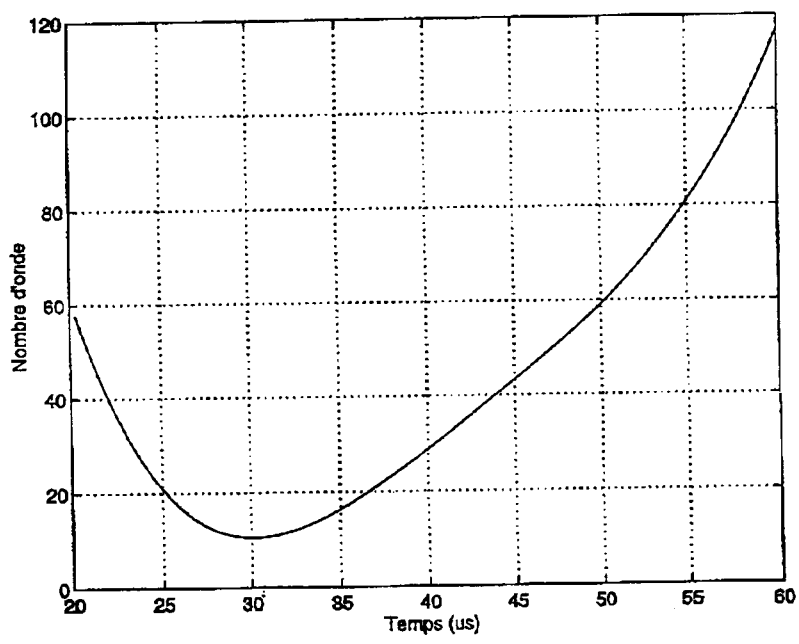


Fig.19.

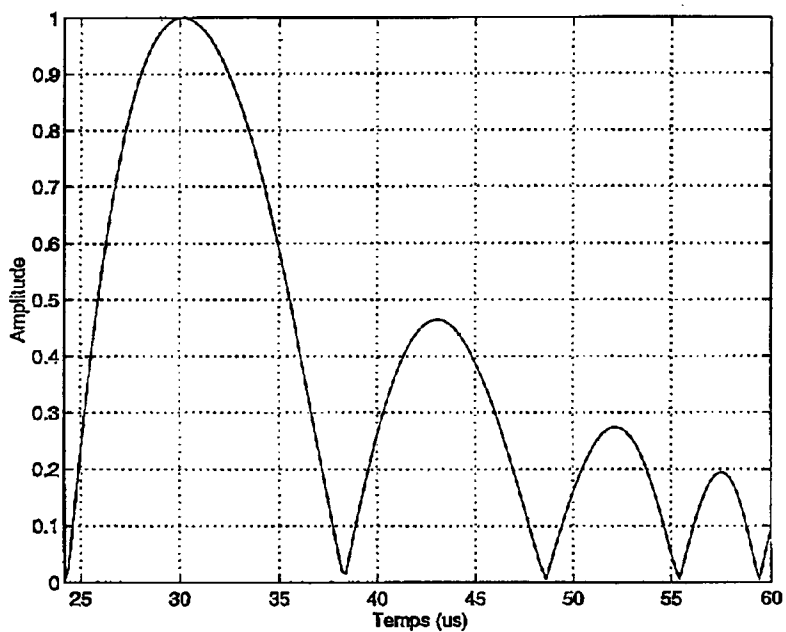


Fig.20.

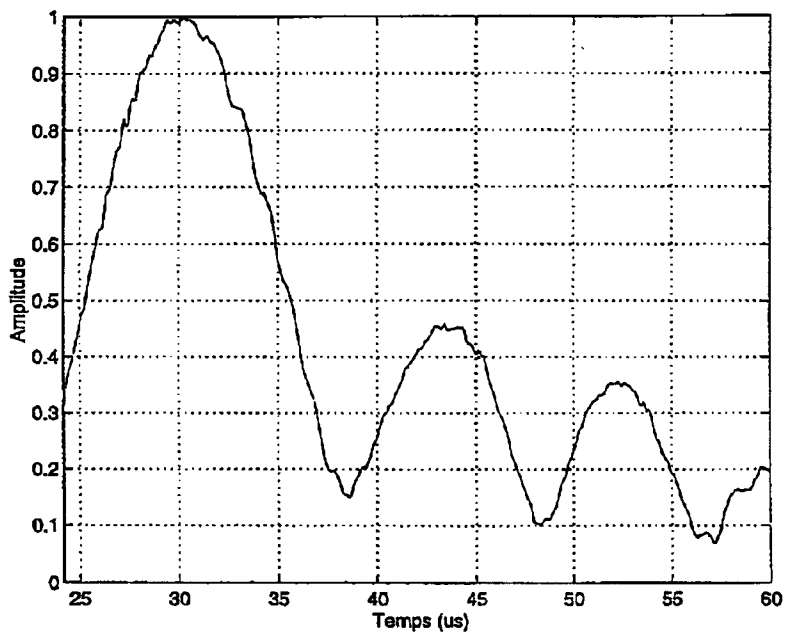


Fig.21.

Bibliographie.

- [1] Brekhovskikh, L., M., Waves in layered media. Academic Press, [1980], New York.
- [2] Bedford, A., Stern, M., Toward a diffusing continuum theory of composite materials. J. Appl. Mech. 38, [1971], 8 - 14.
- [3] Hegemier, G., A., Gurtman, G., A., Nayfeh, A., H., A continuum mixture theory of wave propagation in laminated and fiber reinforced composites. Int. J. Solids structures 9, [1973], 395 - 414.
- [4] Gazanhes, C., Sageloli, J., Kurkdji, J., Propagation acoustique dispersive dans des structures stratifiées. Acoustica 82, [1996], 442 - 449.
- [5] Biot, M., A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. J. Acoust. Soc. Am. 28, [1956] 168 - 178. II. Higher-frequency range. J. Acoust. Soc. Am. 28, [1956] 179 - 191.
- [6] Stoll, R., D., Sediment Acoustics. Lecture Notes in Earth Sciences. Springer - Verlag. [1989], Berlin.
- [7] Turgut, A., An investigation of causality for Biot models by using Kramers-Krönig relations. "Shear waves in marine sediments". Kluwer Academic Publishers. [1991], 21 - 28 .
- [8] Gazanhes, C., Hérault, J., P., Dispersion acoustique dans des roches poreuses. J. Phys. III. 3, [1993] 2071 - 2086.
- [9] Plona, T., J., Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. Appl. Phys. Lett. 36, [1980] 259 - 261.
- [10] Johnson, D., L., Plona, T., J., Acoustic slow waves and the consolidation transition. J. Acoust. Soc. Am. 77, [1982] 556 - 565.
- [11] Meitzler, A., H., Mode coupling occurring in the propagation of elastic pulses in wires. J. Acoust. Soc. Am. 33 [1961], 435 - 445.
- [12] Farnell, G., W., Adler, E., L., Elastic wave propagation in thin layers. Chapitre 2 in Physical acoustics. Academic Press. New York. 1972.
- [13] Schoenberg, M., Plona, T., J., Winkler, K., W., Waves in alternating fluid solid layers. Ultrasonics symposium [1982], 1059 - 1063.

- [14] Miller, S., E., Coupled wave theory and wave guide applications. Bell. Syst. Tech. J. 33 [1954], 661 - 719.
- [15] Louisell, H., Coupled mode and parametric electronics. John Wiley, NewYork. [1960].
- [16] Gazanhes. C., Sageloli. J., Kurkdji. J. Interprétation du couplage de modes dans des structures stratifiées à l'aide de la théorie des ondes électromagnétiques. Acustica. Acta acustica. 83 [1997].

CHAPITRE 5.

LA DISPERSION PARAMÉTRIQUE.

1. Introduction.

Ce dernier chapitre sera consacré à l'étude de la dispersion propre aux milieux périodiques, c'est-à-dire des milieux générés par la répétition d'une structure de base, frontières, impédance etc...

Les applications des structures périodiques sont nombreuses, et connues depuis longtemps [1] en optique et en électromagnétisme. Ce n'est que plus récemment qu'elles apparaissent en acoustique dans le cadre du contrôle non destructif des matériaux composites, en acousto-optique avec le développement des transducteurs à ondes de surface, des déflecteurs de lumière, des lignes acoustiques dispersives pour le traitement du signal.

La périodicité de ces structures génère un type de dispersion particulier, et crée des bandes de fréquences à l'intérieur desquelles il n'y a pas de propagation.

Ces propriétés nouvelles dépendent d'un paramètre, la périodicité du milieu, d'où le nom de "dispersion paramétrique" que l'on peut lui donner. En l'absence d'absorption c'est une dispersion normale, soit géométrique, si la périodicité des conditions aux limites intervient, soit de couplage si les forces de couplage proportionnelles aux déplacements sont périodiques.

L'équation générale qui régit la propagation des ondes en milieu périodique est une équation de Hill. Si la périodicité du milieu est constituée uniquement par un terme en cosinus, elle prend la forme d'une équation de Mathieu.

L. Brillouin [2] a particulièrement bien étudié les vibrations de réseaux cristallins assimilés à des chaînes de particules de masse identique. Il a également étudié l'équation d'onde d'un électron dans un potentiel périodique, mettant en évidence les bandes interdites et les bandes de conduction décrites par les célèbres zones de Brillouin.

Dans la suite de ce chapitre nous allons présenter les équations de Mathieu et de Hill [3] qui décrivent la propagation des ondes en milieux périodiques, l'équation de Hill faisant intervenir des conditions aux limites périodiques.

Puis nous aborderons l'étude des réseaux périodiques d'oscillateurs couplés. Ces couplages sont à l'origine des différents modes de vibration que l'on assimile aux zones de Brillouin. La branche acoustique correspond au premier mode, les branches optiques, aux modes d'ordres supérieurs.

Enfin nous proposerons un exemple, la propagation d'une onde acoustique se propageant perpendiculairement aux couches d'un milieu périodique constitué de lames alternées de matériaux différents. Nous ferons appel, pour le traiter, aux matrices de transfert et nous retrouverons des résultats déjà annoncés à propos de l'équation de Hill.

2. Ondes dans un milieu périodique indéfini.

2.1. Equation de Mathieu.

L'équation de propagation des ondes dans un milieu périodique s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \omega^2 F(x) \Psi = 0, \quad (1)$$

$$\Psi = e^{i\omega t} u(x).$$

L'équation de Mathieu est du type précédent, en supposant que la fonction $F(x)$ est périodique en x de période d . En ne considérant que les deux premiers termes du développement de Fourier, $F(x)$ s'écrit:

$$F(x) = c_0 + 2 c_1 \cos \frac{2\pi x}{d}.$$

En posant $z = \frac{\pi x}{d}$, l'équation de Mathieu prend la forme canonique,

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + (\eta + \gamma \cos 2z) u = 0 \quad (2)$$

$$\text{avec } \eta = \omega^2 \frac{d^2}{\pi^2} c_0 = 4 v^2 d^2 c_0$$

$$\gamma = 8 v^2 d^2 c_1. \quad (3)$$

η et γ sont des fonctions croissantes de la fréquence, et leur rapport est constant.

L'équation (2) admet une solution de Floquet de la forme,

$$u = A(z) e^{\mu z} \quad (4)$$

où $A(z)$ est une fonction périodique.

Ayant affaire à des ondes, nous posons:

$$\mu = i\beta = i \frac{k}{\pi}, \quad \mu z = i\beta z = i \frac{kz}{d} = i 2\pi k z \quad (5)$$

avec k nombre d'onde acoustique.

Deux cas peuvent se présenter:

1) μ est imaginaire pur: $\mu = i\beta$; nous aurons des ondes sinusoïdales non amorties,

2) μ est complexe ou réel: $\mu = \alpha + i\beta$; nous aurons des ondes amorties.

Les solutions périodiques de l'équation (2) ne peuvent pas exister pour n'importe quelles valeurs de η et γ . Le cas particulier évident où $\gamma = 0$ réduit en effet l'équation (2) à $u'' + \eta u = 0$, c'est-à-dire à l'équation du mouvement d'un oscillateur. Deux solutions indépendantes en sont $\cos\sqrt{\eta} z$ et $\sin\sqrt{\eta} z$ qui admettent en z la période $2\pi / \sqrt{\eta}$. Et cette équation particulière n'admet elle-même des solutions de période $2\pi / \sqrt{\eta}$ qu'à la condition que $\sqrt{\eta}$ soit un entier n , ou encore que,

$$\eta = n^2 \quad (6)$$

On a l'habitude de représenter les relations entre μ , $k = 2\pi/d$, la période d du milieu, η et γ par un "diagramme de stabilité" tel que celui de la fig. 1.

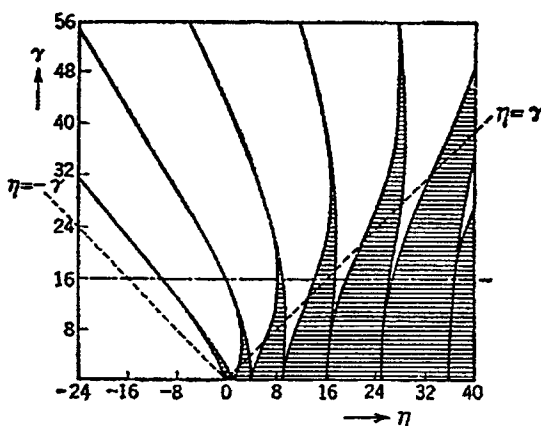


Fig. 1.

Il donne dans le plan (γ, η) l'allure des courbes caractéristiques. Le long d'une branche déterminée, la fonction $\eta = f(\gamma)$ est une fonction continue de γ .

En un point (η, γ) d'une telle branche, l'équation (2) admet une solution de période π qui pour $\gamma \rightarrow 0$ se réduit à $\cos 2z$.

Les régions hachurées correspondent aux couples de valeurs η et γ pour lesquels l'exposant caractéristique μ est imaginaire pur, et pour lesquels il y a propagation d'une onde sinusoïdale non amortie.

Les régions non hachurées correspondent aux couples de valeurs η et γ pour lesquels μ est complexe et pour lesquels il y a des ondes sinusoïdales amorties. En d'autres termes nous voyons apparaître des "bandes passantes" et des "bandes d'arrêt".

Nous pouvons tirer du diagramme précédent un autre diagramme plus facile à manipuler, le "diagramme de Brillouin" qui est une représentation des relations de dispersion qui nous sont familières. Dans ce diagramme reproduit sur la fig. 2, on trace les variations de la pulsation ω en fonction du nombre d'onde ou des valeurs de n .

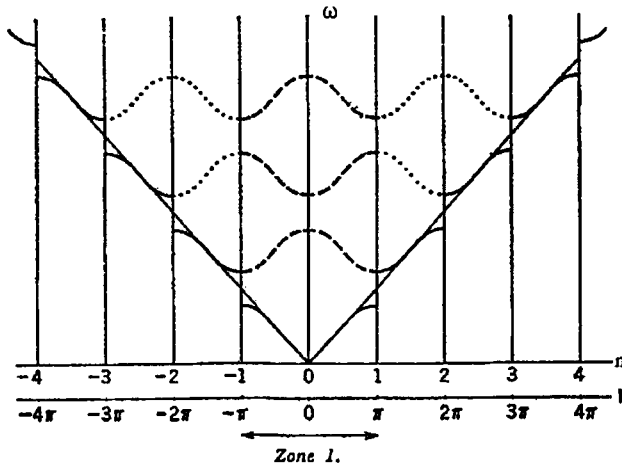


Fig.2.

La région de l'espace comprise entre $-\pi$ et $+\pi$ est appelée "première zone de Brillouin".

Les discontinuités sur la courbe de dispersion se produisent pour,

$$k = \pm n \frac{\pi}{d} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ou encore $2d = \pm n\lambda$. (7)

La relation (7) vérifie la condition de Bragg:

$$2d \sin\theta = \pm n\lambda$$

avec ici $\theta = \pi/2$.

Quand cette condition est satisfaite il n'y a plus propagation, mais par réflexions successives, une onde stationnaire s'établit, pour laquelle la célérité de groupe est nulle. C'est bien ce que nous constatons sur la figure (2) où la célérité de groupe s'annule aux limites $\pm 1/2\pi$ de l'intervalle fondamental.

2.2. Equation de Hill.

L'équation de Hill s'obtient en remplaçant dans l'équation de Mathieu le terme en cosinus par une fonction périodique $f(x)$ telle que:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + [\eta + \gamma f(x)] u = 0. \quad (8)$$

Un cas particulier important en acoustique est celui de la propagation d'une onde perpendiculairement aux strates d'un milieu périodique à deux composants.

La fonction $f(x)$ est représentée par une courbe comportant alternativement des tronçons de longueurs l_1 et l_2 le long desquels elle prend respectivement les valeurs constantes f_1 et f_2 . C'est une fonction créneaux représentée sur la fig. 3.

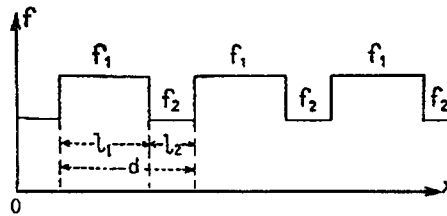


Fig 3

Dans le premier intervalle $(-l_1, 0)$ l'équation admet la solution générale:

$$u = A e^{\chi_1 x} + B e^{-\chi_1 x}$$

et dans le second intervalle $(0, l_2)$: (9)

$$u = C e^{\chi_2 x} + D e^{-\chi_2 x}.$$

Pour solution générale choisissons la solution donnée par la formule de Floquet:

$$u = A(x) e^{\mu x} \quad (10)$$

dans laquelle $A(x)$ est périodique de période $d = l_1 + l_2$.

Le problème est alors de déterminer les coefficients A , B , C et D de manière à assurer la continuité de la fonction $u(x)$ et de sa dérivée du/dx aux extrémités de l'intervalle $(0, l_2)$.

On obtient les relations:

$$\left. \begin{aligned} A + B &= C + D \\ A\chi_1 - B\chi_1 &= C\chi_2 - D\chi_2 \end{aligned} \right\} \text{ pour } x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} Ae^{(\mu d - \chi_1 l_1)} + Be^{(\mu d + \chi_1 l_1)} &= Ce^{\chi_2 l_2} + De^{-\chi_2 l_2} \\ A\chi_1 e^{(\mu d - \chi_1 l_1)} - B\chi_1 e^{(\mu d + \chi_1 l_1)} &= C\chi_2 e^{\chi_2 l_2} - D\chi_2 e^{-\chi_2 l_2} \end{aligned} \right\} \text{ pour } x = l_2 \quad (11)$$

Ces équations constituent un système linéaire et homogène d'inconnues A , B , C et D . En posant $Y = e^{\mu d}$ ce système admet des solutions non nulles si:

$$Y^2 - 2Y \left[\text{ch}\chi_1 l_1 \text{ch}\chi_2 l_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \text{sh}\chi_1 l_1 \text{sh}\chi_2 l_2 \right] + 1 = 0 \quad (12)$$

L'équation (12) admet deux solutions Y_1 et Y_2 telles que $Y_1 = e^{\mu d}$, $Y_2 = e^{-\mu d}$ de produit, $Y_1 Y_2 = 1$,

et de somme, $Y_1 + Y_2 = e^{\mu d} + e^{-\mu d} = 2\text{ch } \mu d$

$$= 2 \left[\text{ch}\chi_1 l_1 \text{ch}\chi_2 l_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \text{sh}\chi_1 l_1 \text{sh}\chi_2 l_2 \right].$$

Soit enfin la condition:

$$\text{ch } \mu d = \text{ch}\chi_1 l_1 \text{ch}\chi_2 l_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \text{sh}\chi_1 l_1 \text{sh}\chi_2 l_2. \quad (13)$$

Telle est l'équation caractéristique qui permet de calculer la dispersion introduite par le milieu.

Envisageons quelques cas particuliers.

1. Soit le cas où $l_1 = l_2 = \pi / 2$

La période d devient égale à π et on a :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta + \gamma \\ \eta_1 &= \eta - \gamma \end{aligned} \quad (14)$$

Deux situations peuvent se présenter:

- a. $\eta > \gamma > 0$ η_1 et η_2 sont positifs, d'où:

$$\chi_1 l_1 = \frac{1}{2} \pi \chi_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\eta_1} = i x_1$$

$$\chi_2 l_2 = \frac{1}{2} \pi \chi_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\eta_2} = i x_2$$

$$\mu = i \mu' = i 2 \pi a$$

et l'équation (13) devient:

$$\cos \pi \mu' = \cos x_1 \cos x_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right) \sin x_1 \sin x_2 \quad (15)$$

- b. $\eta < \gamma$, $\gamma > 0$ alors $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 < 0$ donc:

$$\frac{\pi}{2} x_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\eta_1} = i x_1$$

$$\frac{\pi}{2} \chi_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\eta_2} = x_3$$

et l'équation (13) devient:

$$\cos \pi \mu' = \cos x_1 \operatorname{ch} x_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{x_3} - \frac{x_3}{x_1} \right) \sin x_1 \operatorname{sh} x_3 \quad (16)$$

2. Envisageons maintenant le cas où l_1 est très petit devant la longueur d'onde et $l_2 \sim d$.

On obtient alors:

$$\chi_1 \approx \sqrt{\frac{2c}{l_1 l_2}}, \quad \chi_2 = i \alpha$$

c et d étant des constantes données, l'équation (13) devient:

$$\operatorname{ch} \mu d = \cos \alpha d + \frac{c}{\alpha d} \sin \alpha d \quad (17)$$

La fig. 4 représente les variations du membre de droite de la relation (17) en fonction de αd .

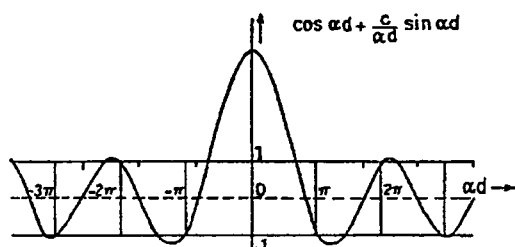


Fig. 4.

La considération des limites ± 1 met en évidence l'existence des bandes passantes et des bandes d'arrêt.

Nous donnerons plus loin un exemple d'application de ce cas à l'acoustique.

3. Les réseaux périodiques d'oscillateurs.

3.1. Suite périodique d'oscillateurs identiques.

Les premières études concernant la propagation dans des milieux périodiques furent consacrées aux vibrations des cristaux dans le domaine des courtes longueurs d'onde. Le réseau à une dimension, le plus simple que l'on puisse envisager, est constitué par des particules de masse égale m , disposées, à l'équilibre, à égale distance d les unes des autres, suivant une droite, les particules étant liées par des ressorts sans masse:

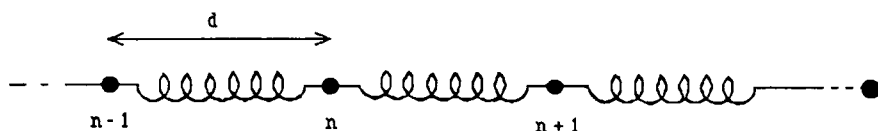


Fig.5.

Dans ces conditions la force exercée sur la particule n par le déplacement de la particule $n + m$ est proportionnelle à la différence de leurs déplacements u de sorte que la force résultante sur la particule n sera:

$$F_n = \sum_m K_m (u_{n+m} - u_n) \quad (18)$$

et son mouvement sera régi par l'équation:

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \sum_m K_m (u_{n+m} - u_n) \quad (19)$$

Cherchons une solution de la forme

$$u_{n+m} = u_0 e^{i(n+m)kd - i\omega t} \quad (20)$$

k désignant le nombre d'onde.

Portons dans (19) il vient:

$$-\omega^2 m u_0 e^{i(nkd - \omega t)} = \sum_m K_m (e^{i(n+m)kd} - e^{imkd}) u_0 e^{i\omega t}.$$

Soit encore

$$\omega^2 m = - \sum_m K_m (e^{imkd} - 1) \quad (21)$$

Par symétrie $K_m = K_{-m} = K$
de sorte que (21) prend la forme:

$$\omega^2 m = - \sum_{m>0} K (e^{imkd} + e^{-imkd} - 2) \quad (22)$$

d'où encore la relation de dispersion:

$$\omega^2 = \frac{2}{m} \sum_{m>0} K (1 - \cos mkd) \quad (23)$$

Si le couplage se limite aux particules les plus proches (23) se réduit à:

$$\omega^2 = \frac{2K}{m} (1 - \cos kd).$$

Soit successivement:

$$\omega^2 = \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{1}{2} kd,$$

et

$$\omega = \left(\frac{4K}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \sin \frac{1}{2} kd \right|, \quad (24)$$

qui représente la relation de dispersion de la suite périodique d'oscillateurs

identiques.

Nous avons tracé ω en fonction de kd sur la fig. 6.

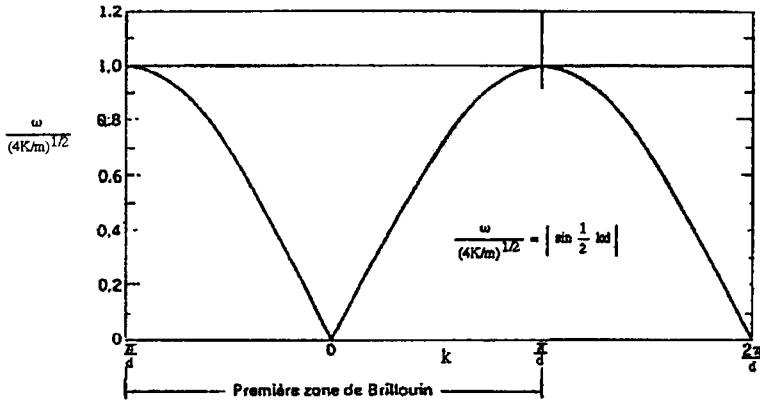


Fig.6.

La courbe est une fonction périodique de k , de période $2\pi/d$. Par conséquent le seul domaine de k à considérer peut-être spécifié par:

$$-\pi \leq kd \leq \pi \text{ ou } -\frac{\pi}{d} \leq k \leq \frac{\pi}{d} \quad (25)$$

qui est la première zone de Brillouin déjà décrite au paragraphe 2.

Aux limites de la zone la valeur $km = \pm \pi/d$ satisfait, comme nous l'avons déjà signalé, à la condition de Bragg. Partant de la relation de dispersion (24) la célérité de groupe est:

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \left(\frac{Kd^2}{m} \right)^{1/2} \cos \frac{1}{2} ka.$$

Elle s'annule aux limites de la zone de Brillouin, puisque nous avons alors des ondes stationnaires.

3.2. Suite périodique d'un ensemble de deux oscillateurs.

Supposons maintenant qu'il existe deux particules de masses m_1 et m_2 liées par des ressorts identiques sans masse.

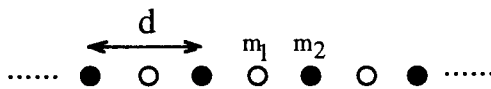


Fig.7.

Si nous limitons encore le couplage aux particules les plus proches, les équations du mouvement seront pour chaque particule:

$$m_1 \frac{d^2 u_{2n+1}}{dt^2} = K (u_{2n+2} + u_{2n} - 2u_{2n+1}) \quad (26)$$

$$m_2 \frac{d^2 u_{2n}}{dt^2} = K (u_{2n+2} + u_{2n-1} - 2u_{2n})$$

cherchons des solutions de la forme :

$$u_{2n+1} = A e^{i[(2n+1)kd - \omega t]}$$

$$u_{2n} = B e^{i(2nkd - \omega t)}.$$

Portons dans (26) nous obtenons

$$-\omega^2 m_1 A = K B (e^{ikd} + e^{-ikd}) - 2KA$$

$$-\omega^2 m_2 B = K A (e^{ikd} + e^{-ikd}) - 2KB.$$

Ce système d'équation a une solution non triviale si le déterminant des coefficients A et B s'annule:

$$\begin{vmatrix} 2K - m_1 \omega^2 & -2K \cos kd \\ -2K \cos kd & 2K - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

Soit l'équation de dispersion:

$$\omega^2 = K \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \pm K \left[\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2 ka}{m_1 m_2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

La courbe représentant les variations de ω en fonction de ka comporte donc deux branches définies par les signes \pm de la relation (28).

Les deux racines de (28) sont:

$$\left. \begin{aligned} \omega_-^2 &= \frac{2K}{m_1+m_2} (kd)^2 \text{ pour la branche inférieure} \\ &\text{et} \\ \omega_+^2 &= 2K \left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \frac{(kd)^2}{m_1 + m_2} \right] \text{ pour la branche supérieure} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Les variations de ω en fonction de k pour $m_1 > m_2$ sont représentées

sur la fig.8.

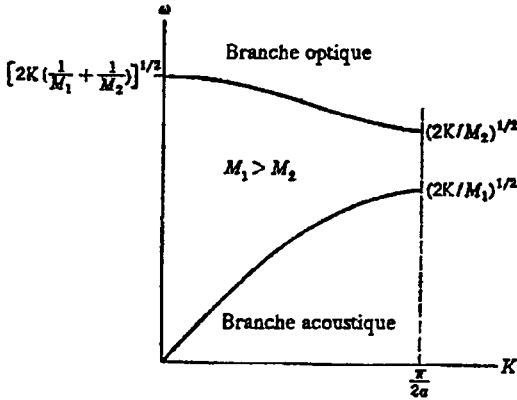


Fig.8.

La branche inférieure est appelée branche acoustique et la branche supérieure est appelée branche optique.

Dans la branche acoustique les particules oscillent en phase, dans la branche optique par contre, les particules oscillent en opposition de phase.

Ce comportement est illustré sur la fig.9.

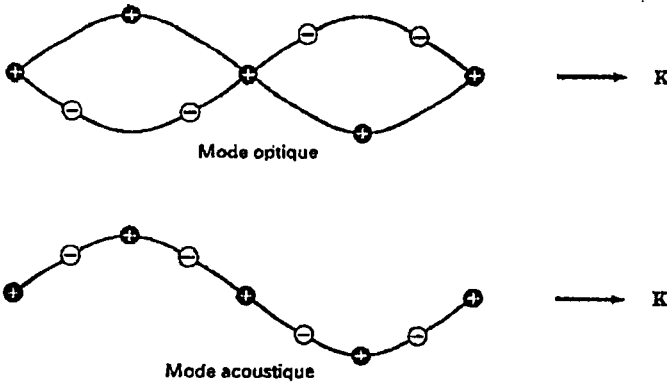


Fig.9.

La fig.8 montre qu'il n'y a pas propagation pour les fréquences comprises entre $(2K/m_1)^{1/2}$ et $(2K/m_2)^{1/2}$.

Cette zone détermine une bande d'arrêt comme nous l'avons vu à propos de l'équation de Mathieu.

Lorsque l'on fait croître indéfiniment le nombre de particules sur la maille élémentaire d , le nombre de branches optiques croît indéfiniment et les courbes de dispersion prennent l'allure générale de celles de la fig.10.

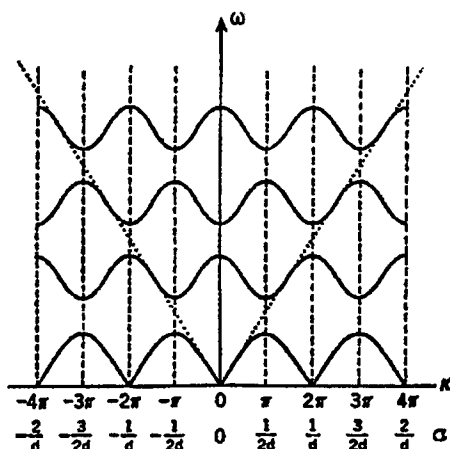


Fig.10.

4. Dispersion acoustique de vitesse dans des structures périodiques.

Examinons maintenant un problème d'acoustique illustré par la propagation d'une onde perpendiculairement aux strates d'un milieu périodique. Suivons les travaux de G. Bonnet [4],[5] et E. de Bazelaire et al. [6] qui ont traité de cette question dans le cadre du formalisme des matrices de propagation, formalisme qui sera développé plus tard par B.L. Kennett [7].

4.1. Matrice de transfert.

Soit un modèle simple de propagation à une dimension suivant l'axe x , dans un milieu, schématisé sur la fig. 11, constitué par une alternance de couches d'épaisseurs d_1 et d_2 et d'impédance acoustique Z_1 et Z_2 .

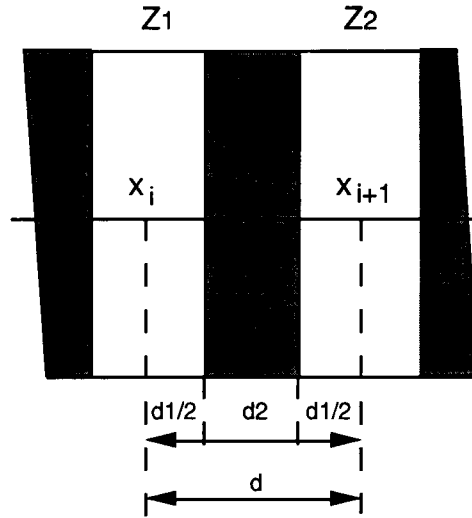


Fig.11.

4.1.1. Matrice de transfert en milieu homogène

Introduisons un vecteur d'état champ acoustique C qui représente le couple contraintes (pression) $p(x,t)$ et vitesse vibratoire $u(x,t)$. p et u sont liées par la relation

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{i\omega}{E} p = 0 \quad (30)$$

et vérifient l'équation de propagation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = 0 \quad (31)$$

L'axe Ox est normal aux strates, c est la célérité du son, et ω la pulsation dans le cas d'une excitation monochromatique.

La solution générale de (31) s'écrit:

$$p = A(\omega) e^{-\frac{i\omega x}{c}} + B(\omega) e^{\frac{i\omega x}{c}}$$

$$u = \left[A(\omega) e^{-\frac{i\omega x}{c}} - B(\omega) e^{\frac{i\omega x}{c}} \right] / Z \quad (32)$$

où, compte tenu de nos hypothèses, $Z = \rho c$ est l'impédance acoustique spécifique du milieu.

On décrit la propagation du vecteur champ entre l'abscisse x et l'abscisse $x + d$ par la matrice de transfert [4],[5]

$$T = \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega d}{c} & -iZ \sin \frac{\omega d}{c} \\ -\frac{i}{Z} \sin \frac{\omega d}{c} & \cos \frac{\omega d}{c} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Cette matrice dépend des deux grandeurs caractéristiques du milieu: l'impédance Z et le temps de transit $\tau = d/c$. Elle a pour valeurs propres

$$e^{-\frac{i\omega d}{c}} \quad \text{et} \quad e^{\frac{i\omega d}{c}} \quad \text{et pour vecteurs propres } [1, 1/Z] \quad \text{et} \quad [1, -1/Z].$$

4.1.2. Matrice de transfert en milieu périodique

Le milieu est composé d'une succession alternée de lames d'épaisseurs d_1, d_2 et d'impédances Z_1, Z_2 . Pour des raisons de symétrie nous choisissons les abscisses x_i au centre des lames (Fig.11) p et u étant continues au passage d'une interface, il en est de même du vecteur champ, de sorte que la fonction de transfert d'une cellule élémentaire se présente sous la forme d'un produit de trois matrices T dont la structure est donnée par (33).

$$M = T\left(\frac{d_1}{2}, Z_1\right) T(d_2, Z_2) T\left(\frac{d_1}{2}, Z_1\right),$$

soit, après calcul et après avoir posé:

$$\tau_1 = \frac{d_1}{c_1}, \tau_2 = \frac{d_2}{c_2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2},$$

$$M = \frac{1}{1-r^2} \begin{bmatrix} \cos \psi - r^2 \cos \gamma \psi & -2iZ_1 \left(\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + r \cos\left(\frac{\gamma \psi}{2}\right) \right) \left(\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - r \sin\left(\frac{\gamma \psi}{2}\right) \right) \\ -\frac{2i}{Z_1} \left(\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - r \cos\left(\frac{\gamma \psi}{2}\right) \right) \left(\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - r \sin\left(\frac{\gamma \psi}{2}\right) \right) & \cos \psi - r^2 \cos \gamma \psi \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\text{où } \psi = 2\pi v(\tau_1 + \tau_2) \quad \text{et} \quad r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}.$$

r correspond au coefficient de réflexion d'une onde au passage d'un milieu d'impédance Z_1 vers un milieu d'impédance Z_2 .

4.2. Les relations de dispersion

Nous savons que les valeurs propres de la matrice de transfert M sont:

$$Y_1 = e^{\frac{i\omega d}{c}} \quad \text{et} \quad Y_2 = e^{-\frac{i\omega d}{c}}$$

avec cette fois $d = d_1 + d_2$.

La somme, $Y_1 + Y_2$, est la trace de M , d'où il résulte que:

$$\cos \frac{\omega d}{c} = \cos kd = \frac{\cos \psi - r^2 \cos \gamma \psi}{1 - r^2}$$

soit encore sous une autre forme:

$$\cos kd = \cos \frac{\omega d_1}{c_1} \cdot \cos \frac{\omega d_2}{c_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \sin \frac{\omega d_1}{c_1} \cdot \sin \frac{\omega d_2}{c_2} = F(\omega). \quad (35)$$

Nous obtenons la relation de dispersion classique pour un milieu périodique stratifié.

Dans cette relation, k est le nombre d'onde apparent du milieu périodique, alors que k_1 et k_2 sont les nombres d'onde relatifs aux milieux 1 et 2, et c la célérité de phase apparente des ondes acoustiques qui se propagent dans le milieu périodique.

La relation (35) détermine les bandes passantes et les bandes d'arrêt; les bandes passantes correspondent aux valeurs de ω pour lesquelles:

$$-1 \leq \cos kd \leq 1 \quad \text{ou encore} \quad -1 \leq F(\omega) \leq 1.$$

La figure 12 représente les variations de $F(\omega)$, deuxième membre de (35) en fonction de la fréquence dans le cas d'un milieu constitué de lames d'aluminium séparées par des lames d'eau.

Dans la gamme de fréquences 0 - 2MHz on notera la présence de quatre bandes passantes [8].

Les relations de dispersion $\omega = f(kd)$, tracées sur la fig.13 correspondent aux quatre bandes passantes précédentes. Ce sont les quatre premières branches de la théorie de Brillouin, la bande basse fréquence dite acoustique, et les branches hautes fréquences dites optiques.

Enfin la fig.14 représente les variations de la célérité de phase des ondes en fonction de la fréquence, dans la première zone de Brillouin. Les points correspondent à des mesures de célérité dans la bande 80 - 190 kHz. Pour une structure périodique de couches d'eau et d'aluminium d'épaisseurs respectives 1 mm et 2 mm, la célérité de phase décroît lorsque la fréquence augmente, la dispersion est normale.

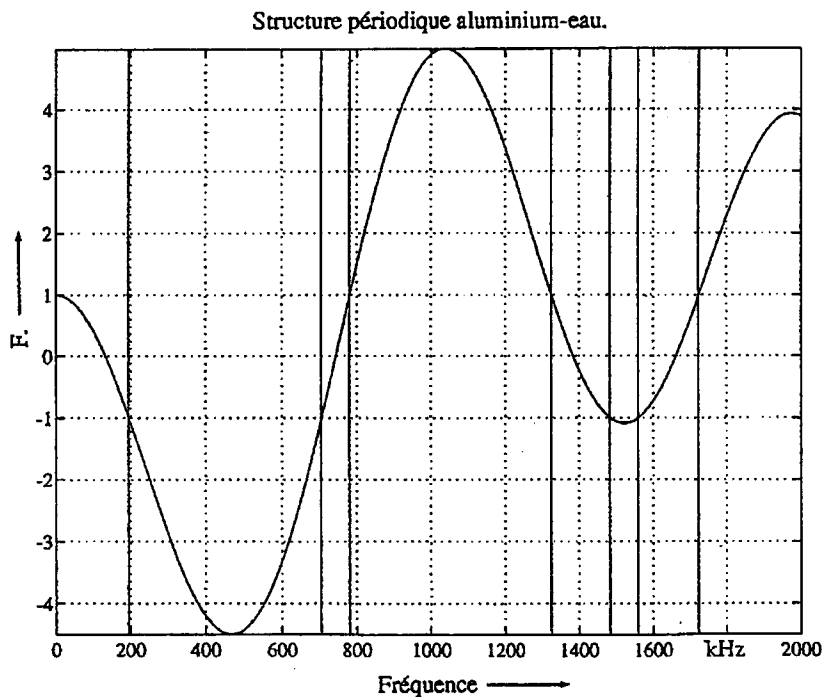


Fig.12.

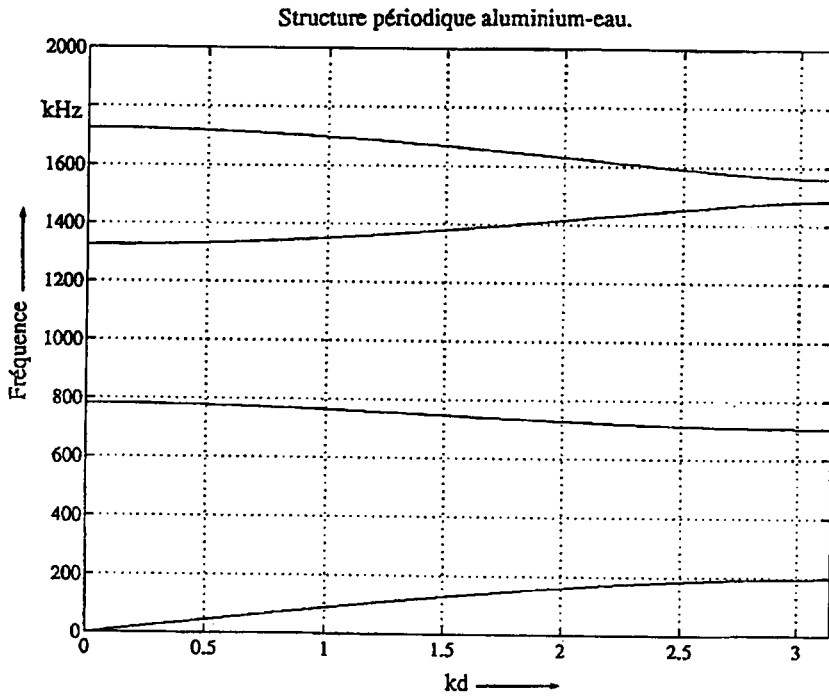


Fig. 13.

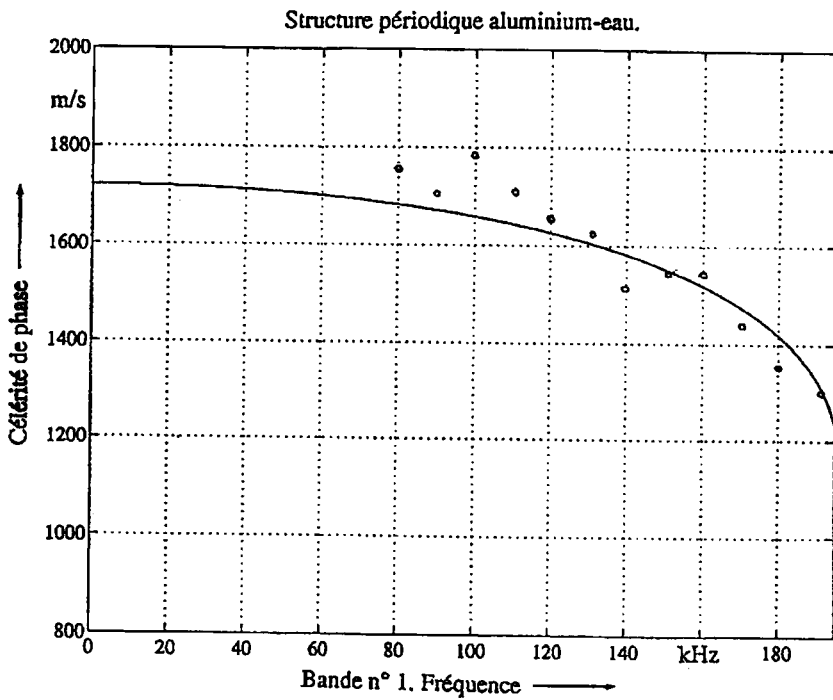


Fig. 14.

Bibliographie.

- [1] Elachi, C., Waves in active and passive periodic structures: a review. *Pro. I.E.E.E.* 64, [1976], 1666 - 1698.
- [2] Brillouin, L., Parodi, M., Propagation des ondes dans les milieux périodiques. Masson et Cie Paris 1956.
- [3] Campbell, R., Théorie générale de l'équation de Mathieu. Masson et Cie Paris 1955.
- [4] Bonnet, G., Transmission des signaux en milieux discontinus itératifs. Première Partie : Milieux discontinus (multiplets). *Ann. Télécommunic.*, 35, [1980], 199 - 221.
- [5] Bonnet, G., Transmission des signaux en milieux discontinus itératifs. Deuxième Partie : Milieux itératifs (échelles de multiplets). *Ann. Télécommunic.*, 35, [1980], 237 - 249.
- [6] De Bazelaire, E., Cavassilas, J.F., Dolla, J.P., Transmission des signaux perpendiculairement à un milieu stratifié périodique : étude fréquentielle. *Ann. Télécommunic.*, 35, [1980], 251 - 262.
- [7] Kennett, B.L., Seismic Wave propagation in stratified media. Cambridge University Press, 1983. New York.
- [8] Gazanhes, C., Sageloli, J., Etude de la dispersion acoustique de célérité dans des structures périodiques. *Acustica*, 81, [1995], 221 - 227.

LABORATOIRE DE MECANIQUE ET D'ACOUSTIQUE (L.M.A.)
31, chemin Joseph-Aiguier
13402 MARSEILLE CEDEX 09

Téléphone : 04 91 22 40 00
Télécopieur: 04 91 22 08 75